Resumos

1 O método Simplex

1.1 Simplex Fase II

O método Simplex Fase II é aplicado quando já temos uma base factível. Considerando:

$$\begin{cases} A_{\bullet s:}\text{Todas as linhas da coluna } s \\ a_{rs} : \text{Elemento da linha } r \text{ e coluna } s \end{cases}$$

O algoritmo fica então:

1. (Menor custo reduzido): encontre
$$s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{argmin}\ c_j$$
em que s é o índice da coluna em que c_j é mínimo:
$$c_s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{min}\ c_j$$
2. (Teste de otimalidade): se $c_s \geq 0$ PARE. Solução atual é ótima.
3. (Variável que entra na base): se $c_s < 0$, s é o índice da variável que entra na base.
4. (Teste da solução ilimitada): se $A_{\bullet s} \leq 0$ PARE; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha r que sai da base, e o valor da variável x_s que entra na base é dado por:
$$x_s = \underset{\{\forall a_{is} > 0, i=1,\ldots,m\}}{min} \frac{b_i}{a_{is}}$$
6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento a_{rs} com pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

ATENÇÃO: No passo 5 as razões são feitas somente nas *linhas das restrições*, portanto o índice da linha r pode ter duas interpretações: r + 1 se a linha da função objetivo for considerada, ou somente r se considerarmos apenas as restrições.

O simplex "enunciado" fica da seguinte forma:

1. (menor custo reduzido): olhe para a linha dos coeficientes da função objetivo, e selecione o menor de todos.
2. (teste de otimalidade): se o coeficiente selecionado for positivo, o método chegou ao fim, e a solução atual é ótima.
3. (variável que entra na base): se o coeficiente for negativo, a variável referente a coluna desse coeficiente é a que vai fazer parte da nova base (entra na base).
4. (teste da solução ilimitada): olhando para os coeficientes de todas as linhas na coluna da variável que entra na base (somente nas restrições), se nenhum valor for estritamente positivo

(> 0), o problema não tem solução limitada (fim).

5. (variável que sai da base): considerando todos os valores da coluna da variável que entra na base *que são positivos*, e todos os valores do lado direito das equações, faça a divisão dos valores do lado direito (b) pelos coeficientes positivos. Selecione a linha que mantiver a menor razão. Olhando para as variáveis atualmente básicas, essa é a variável que vai sair da base.
6. (atualização da tabela): considerando o elemento da coluna e da linha selecionados nos passos 3 e 5:
   (a) Divida a linha toda da variável por ela mesma (deixar seu valor igual a 1).
   (b) Use a linha da própria variável para zerar o coeficiente de todas as outras linhas, acima e abaixo dela (usando as operações elementares entre linhas das matrizes).
   (c) Troque a variável que saiu da base pela que entrou na primeira coluna (somente por notação).
   (d) Volte para o passo 1.

1.2 Simplex Fase I

O algoritmo da Fase I fica:

1. Torne todo b não negativo.
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.
$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m})$$
3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:
$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$
4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

No fim da otimização da Fase I, faça:

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I, PARE: o problema original é infactível.
2. Preparação para a Fase II:
   (a) Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela.
   (b) Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**.
   (c) Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

2 Dualidade

2.1 Definição de dualidade

Para encontrar o dual de um modelo primal, primeiro verificamos a função objetivo: se for de maximização, usamos a definição 1 e deixamos todas as restrições na forma $\geq$, se for de minimização usamos a definição 2 e deixamos todas as restrições na forma $\leq$. As definições ficam então:

CASO I:

PRIMAL	DUAL
$\min \text{ z} = c^T x$	$\max \text{ v} = b^T \pi$
$Ax \geq b$	$A^T \pi \leq c$
$x \geq 0$	$\pi \geq 0$

CASO II:

PRIMAL	DUAL
$\max \text{ z} = c^T x$	$\min \text{ v} = b^T \pi$
$Ax \leq b$	$A^T \pi \geq c$
$x \geq 0$	$\pi \geq 0$

2.2 Tabela de transformação

Podemos encontrar o dual diretamente pela tabela de conversão, como mostrado na Figura 1.

	minimização	**maximização**	
variaveis	≥ 0	$\leq$	restrições
	≤ 0	$\geq$	
	irrestrita	$=$	
	#	#	
restrições	$\geq$	≥ 0	variaveis
	$\leq$	≤ 0	
	$=$	irrestrita	
	#	#	

Figure 1: Tabela de conversão Dual-Primal

2.3 O método dual-Simplex

O método Dual Simplex é usado quando o problema não é primal factível, porém ainda é dual factível. O algoritmo é aplicado ao mesmo quado do Simplex, simplesmente alterando a forma de escolher a variável que sai e a que entra na base. Para que o método possa ser aplicado as seguintes condições precisam ser satisfeitas:

1. A tabela está na forma canônica.
2. Todos os coeficientes da função objetivo são ≥ 0 factibilidade dual.
3. Pelo menos um valor de $b < 0$ infactibilidade primal.

O algoritmo fica então:

1. (critério de otimalidade): Se nenhum $b < 0$, pare, a solução atual é ótima.
2. (seleção da variável que sai da base): selecione a variável que sai da base na linha r, de acordo com:
$$\bar{b}_r = \underset{\{\forall i \in 1,\dots,m, \bar{b}_i < 0\}}{min} \bar{b}_i$$
3. (seleção da variável que entra na base): selecione a variável da coluna s de forma que:
$$\frac{c_s}{a_{r,s}} = \underset{\{j | j \in N, a_{r,j} < 0\}}{max} \left\{ \frac{c_j}{a_{r,j}} \right\},$$
Se todo $a_{r,j} > 0$, pare, o problema é infactível.
4. (pivoteamento): Realize as operações de pivoteamento no elemento $a_{r,s}$ e volte para 1.

3 A matriz inversa e o quadro Simplex

Um modelo de PL na forma padrão pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{aligned} \min \text{ z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Ainda, considerando um conjunto de variáveis básica em uma solução qualquer, podemos reescrever esse modelo separando todos os coeficientes referentes às variáveis básicas (B) e não básicas (N), como:

$$\begin{aligned} \min \text{ z} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \\ \mathbf{B}\mathbf{x}_B + \mathbf{N}\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

Em que:

1. $\mathbf{c}_B^T$ e $\mathbf{c}_N^T$ são os vetores dos coeficientes das variáveis básicas e não básicas na função objetivo.
2. $\mathbf{B}$ e $\mathbf{N}$ são as submatrizes da matriz tecnológica, referentes às colunas das variáveis básicas e não básicas.
3. $\mathbf{b}$ é o vetor dos recursos.

Conhecendo a inversa de uma base B^{-1} (a base é a matriz composta pelas colunas de A referentes às variáveis básicas, com o modelo na forma padrão) é possível recuperar todo o quadro Simplex. As formulas para isso são dadas por:

$\mathbf{x}_B$	$\mathbf{x}_N$	$-z$
0	$\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$
$\mathbf{I}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$	$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$

4 Análise de sensibilidade

Análise de sensibilidade se refere a alteração na base e custo da solução ótima em função de alterações nos parâmetros do modelo.

4.1 Alterações em b

4.1.1 Valores marginais (preços sombra)

Os valores marginais nos dizem a taxa de alteração da função objetivo, ao alterarmos os valores dos recursos (**b**). Existe um valor marginal para cada restrição, e eles são os mesmos da **solução dual** (π).

Lembrando que para encontar os valores duais na tabela Simplex basta selecionar o negativo dos coeficientes c_i da tabela final Simplex, referentes às variáveis de folga (ou às variáveis artificiais, se o problema precisar da FASE II, neste caso, não remova as colunas das variáveis artificiais após a FASE II).

4.1.2 Ranges dos recursos

Para encontrar a faixa de valores de b para os quais a solução atual permance ótima (mesmas variáveis na base, prém com valores diferentes), faça:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq 0$$

4.1.3 Alteração nos recursos

Para identificar como a solução ficaria com um recurso alterado, use a fórmula:

$$b_{novo} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

Adicionando uma variável ao elemento do vetor **b** que se deseja encontrar o *range*. Se algum valor do novo b for ≤ 0, sabemos que a solução com a base atual é infactível. Neste caso, ainda temos factibilidade dual, de forma que o algoritmo dual Simplex deve ser aplicado para encontrar a nova solução.

4.2 Alterações em c^T

Ao alterar os valores de c^T, é necessário diferenciar em valores básicos e não básicos.

4.2.1 Não básico básicos

Para saber qual seria o custo na tabela final com a alteração de um c^T não básico, basta usar a fórmula:

$$c_i^T(novo) = c_i^T - c_B^T B^{-1} A_i$$

Substituindo c_i^T pelo valor alterado. Se o novo $c_i^T < 0$, altere esse valor na tabela final Simplex, e continue com o algoritmo Simplex. Se o valor for ≥ 0 a solução atual permanece ótima.

Para encontrar os *ranges* de c^T não básicos, use a fórmula:

$$c_i^T - c_B^T B^{-1} A_i \geq 0$$

Considerando c_i^T como variável.

4.2.2 Básicos

Ao alterar valores de c_i^T básicos, seu custo na função objetivo será diferente de zero (na solução atual é zero), de forma que a tabela deve ser atualizada (zerando seu custo). Após a atualização da tabela, verificar se nenhuma outra variável deve entrar na base, em caso positivo, continuar com o algoritmo Simplex.

4.3 Alterações em A_i

Alterar elementos da matriz **A**, altera também os custos na função objetivo. Dessa forma, calcule o novo custo usando a fórmula:

$$c_i^T(novo) = c_i^T - c_B^T B^{-1} A_i$$

Em que algum elemento de A_i será alterado. Se o custo for < 0, o método Simplex deve continuar com essa nova tabela. Neste caso, é necessário atualizar os valores da nova coluna A_i na tabela final, pela fórmula:

$$A_i(novo) = B^{-1} A_i$$

Para encontrar os *ranges* de A_i, usamos a mesma fórmula de atualização dos custos, porém impondo a condição de não negatividade e considerando algum elemento de A_i como variável.

$$c_i^T - c_B^T B^{-1} A_i \geq 0$$