Dualidade: Modelos e Teoremas

1. (**R**) Para cada um dos modelos de PL abaixo, escreva o seu dual (*usando a definição de dualidade*).

(a)
$$\begin{array}{lrcrl} \text{max z} = & 5x_1 & + & 2x_2 & \\ & x_1 & & & \leq 3 \\ & & & x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq 9 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

RESPOSTA:

Pela definição de dualidade: como o problema é de maximização (CASO II), as restrições devem estar na forma $\leq$. Como elas já estão nessa forma, a definição pode ser aplicada, gerando o seguinte dual:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{min v} = & 3\pi_1 & + & 4\pi_2 & + & 9\pi_3 & \\ & \pi_1 & & & + & \pi_3 & \geq 5 \\ & & & \pi_2 & + & 2\pi_3 & \geq 2 \\ & \pi_1 & , & \pi_2 & , & \pi_3 & \geq 0 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{lrcrl} \text{min z} = & x_1 & + & 2x_2 & \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq 3 \\ & 3x_1 & + & 4x_2 & \leq 5 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

RESPOSTA:

Pela definição de dualidade: como o problema é de minimização (CASO I), devemos transformar todas as restrições na forma $\geq$, assim multiplicamos todas as inequações por -1:

$$\begin{array}{lrcrl} \text{min z} = & x_1 & + & 2x_2 & \\ & 2x_1 & - & x_2 & \geq -3 \\ & -3x_1 & - & 4x_2 & \geq -5 \\ & -x_1 & + & x_2 & \geq -2 \end{array}$$

Assim, o dual fica:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{max v} = & -3\pi_1 & - & 5\pi_2 & - & 2\pi_3 & \\ & 2\pi_1 & - & 3\pi_2 & - & \pi_3 & \leq 1 \\ & -\pi_1 & - & 4\pi_2 & + & \pi_3 & \leq 2 \\ & \pi_1 & , & \pi_2 & , & \pi_3 & \geq 0 \end{array}$$

O modelo já é o dual. Porém, podemos fazer uma transformação para deixa-lo mais "apresentável". Note que a maioria dos coeficientes são negativos, de forma que podemos fazer a seguinte transformação de variáveis: $-\pi_1 = \pi_1^+ =$, $-\pi_2 = \pi_2^+$ e $-\pi_3 = \pi_3^+$, com $\pi_1^+, \pi_2^+, \pi_3^+ \leq 0$ (usando a tabela essa transformações é feita automaticamente). Ficamos com o modelo:

$$\begin{array}{lrcrcrl} \text{max v} = & 3\pi_1^+ & + & 5\pi_2^+ & + & 2\pi_3^+ & \\ & -2\pi_1^+ & + & 3\pi_2^+ & + & \pi_3^+ & \leq 1 \\ & \pi_1^+ & + & 4\pi_2^+ & - & \pi_3^+ & \leq 2 \\ & \pi_1 & , & \pi_2 & , & \pi_3 & \leq 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{lccccl} \max z = & 5x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & & & \leq 3 \\ & & & x_2 & \leq 4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq 9 \\ & x_1 \geq 0 & , & x_2 \text{ irrestrito} & \end{array}$$

RESPOSTA:

Como x_2 é irrestrito, precisamos primeiro fazer a transformação: $x_2 = x_2^+ - x_2^-$:

$$\begin{array}{lcccl} \max z = & 5x_1 & + & 2(x_2^+ - x_2^-) & \\ & x_1 & & & \leq 3 \\ & & & (x_2^+ - x_2^-) & \leq 4 \\ & x_1 & + & 2(x_2^+ - x_2^-) & \leq 9 \\ & x_1, & x_2^+, & x_2^- & \geq 0 \end{array}$$

Agora, podemos aplicar a definição. Como o problema é de maximização, as restrições devem estar na forma de $\leq$. Como já estão, o modelo dual fica:

$$\begin{array}{lccccccl} \min v = & 3\pi_1 & + & 4\pi_2 & + & 9\pi_3 & \\ & \pi_1 & & & + & \pi_3 & \geq 5 \\ & & & \pi_2 & + & 2\pi_3 & \geq 2 \\ & & - & \pi_2 & - & 2\pi_3 & \geq -2 \\ & \pi_1 & , & \pi_2 & , & \pi_3 & \geq 0 \end{array}$$

Embora o modelo já seja o dual, também podemos fazer uma transformação. Note que se multiplicarmos a quarta restrição por -1, ela fica igual a inequação 3, porém com o sinal $\geq$. Assim, podemos "juntar" as duas inequações em uma igualdade. O modelo fica então:

$$\begin{array}{lccccccl} \min v = & 3\pi_1 & + & 4\pi_2 & + & 9\pi_3 & \\ & \pi_1 & & & + & \pi_3 & \geq 5 \\ & & & \pi_2 & + & 2\pi_3 & = 2 \\ & \pi_1 & , & \pi_2 & , & \pi_3 & \geq 0 \end{array}$$

Ou seja, a variável irrestrita x_2 no primal gerou uma equação no modelo dual.

2. (**R**) Para cada um dos modelos do exercício anterior, encontre o dual usando a tabela de conversão.
3. (**R**) Uma fábrica produz dois artigos A e B, que devem passar por duas máquinas diferentes M1 e M2. M1 tem 12 horas de capacidade diária disponível e M2 tem 5 horas. Cada unidade de produto A requer 2 horas em ambas as máquinas. Cada unidade de produto B requer 3 horas em M1 e 1 hora em M2. O lucro líquido de A é de R$ 60,00 por unidade e o de B, R$ 70,00 por unidade. Você trabalha em uma empresa que aluga máquinas do tipo M1 e M2, e ficou sabendo dos dados de produção dos produtos A e B da empresa. Você tem interesse em alugar as suas máquinas para a empresa, de forma a gerar lucro, e deseja usar as informações que obteve da empresa para criar um modelo de PL que te auxilie nesse tarefa. Com base nisso, faça o que se pede:
   (a) Escreva o modelo de PL para o problema da empresa. Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_a : \text{Quantidade produzida do produto A.} \\ x_b : \text{Quantidade produzida do produto B.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{array}{lr} \max & Z(x_1, x_2) = 60x_a + 70x_b \\ \text{Sujeito à} & 2x_a + 3x_b \leq 12 \\ & 2x_a + x_b \leq 5 \\ & x_a, x_b \in R^+ \end{array}$$

(b) Escreva o modelo de PL para o seu problema.
RESPOSTA:
Sabemos que o modelo para o aluguel das máquinas é dado pelo dual do modela da empresa. Usando a Tabela ou a definição, o dual fica (atribuindo significados a π_1 e π_2):

$$\begin{cases} \pi_1 : \text{Custo/hora para o aluguel da máquina M1.} \\ \pi_2 : \text{Custo/hora para o aluguel da máquina M2.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{array}{lr} \min & V(\pi_1, \pi_2) = 12\pi_1 + 5\pi_2 \\ \text{Sujeito à} & 2\pi_1 + 2\pi_2 \geq 60 \\ & 3\pi_1 + \pi_2 \geq 70 \\ & \pi_1, \pi_2 \in R^+ \end{array}$$

(c) Por algum motivo qualquer, nesse momento nem você e nem a empresa possuem um solver para encontrar as soluções ótimas, de forma que devem tentar encontrar as melhores soluções manualmente (sem o método gráfico também!). Você fica sabendo que a empresa conseguiu encontrar uma solução factível para o problema com lucro total de z = 240. Da mesma forma você está tentando encontrar soluções para o seu problema antes de ir fazer uma proposta para a empresa, e a sua melhor solução tem um custo de v = 310. O seu chefe afirma que você não deve parar de buscar soluções até encontrar uma em que o custo é de v = 230 (pois ele imagina que com esse valor a oferta será irrecusável). O que você pode afirmar sobre a intuição do seu chefe? Se baseie nos teoremas da dualidade para compor o seu argumento.
RESPOSTA:
Pelo teorema fraco da dualidade, sabemos que se z e v forem valores das funções objetivos para soluções factíveis do primal (na forma de minimização) e do dual (na forma de maximização), respectivamente, temos que $v \leq z$. Como temos o primal na forma de *maximização* e o dual na forma de *minimização*, segue que $z \leq v$, ou seja, o valor de qualquer solução factível do primal é um limitante inferior para o valor do dual.
Como temos $z = 240$, sabemos que não existe uma solução dual com $v \leq 240$, de forma que não faz sentido o que o chefe está exigindo, esta solução nunca será encontrada. Graficamente temos como mostrado na Figura 1.

(d) Agora você têm acesso a um solver muito potente (GUSEK), e consegue utilizá-lo para encontrar uma solução. Encontre a solução ótima pelo solver.
RESPOSTA:
O modelo no GUSEK fica como na Figura 2
Com solução ótima $x^T = (x_a, x_b) = (0.75, 3.5)$ e lucro total de 290.

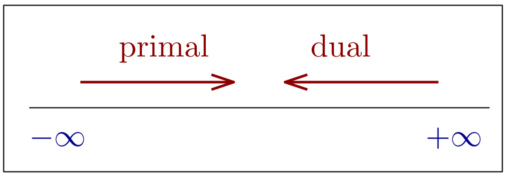

Figure 1: Limitantes primal-dual

```
Maximize
60 xa + 70 xb
Subject to
2 xa + 3 xb <= 12
2 xa + xb <=5
End
```

Figure 2: Modelo primal - GUSEK

(e) Seu chefe é um homem muito desconfiado, e não acredita que a resposta que você encontrou é a ótima (embora ele conheça os teoremas de dualidade e acredite neles). Como você pode provar que a sua solução é de fato ótima? (DICA: convença-o pela utilização dos teoremas).

RESPOSTA:

Para provar que a solução é ótima (dado que o chefe de fato conhece e acredita nos teoremas da dualidade), podemos usar a parte 2 do teorema fraco, ou seja: sejam z e v valores das funções objetivo para os problemas primal e dual, respectivamente, se $z = v$, então as soluções são ótima.

Dessa forma, basta resolvermos o problema dual e verificar se o custo é o mesmo do primal. Usando o software GUSEK temos o seguinte modelo dual (Figura 3):

```
Minimize
12 pi1 + 5 pi2
Subject to
2 pi1 + 2 pi2 >= 60
3 pi1 + pi2 >= 70
End
```

Figure 3: Modelo dual - GUSEK

Com solução ótima $\pi^T = (\pi_1, \pi_2) = (20, 10)$ e lucro total de 290. Assim, como $v = z$ sabemos que de fato a solução primal é ótima

4. (**R**) Considerando os modelos primal-dual encontrados no exercício 1a, adicione as folgas aos modelos e crie os relacionamentos entre as variáveis de um e as folgas da outro (relação dada pelo teorema das folgas complementares). Em seguida resolva o modelo primal pelo método gráfico, e use os relacionamentos para encontrar a solução do problema dual. Verifique se as soluções são de fato ótimas (também usando os teoremas).
RESPOSTA:
Sabemos que cada restrição primal está associada a uma variável dual. Ainda, pelo teorema das folgas complementares (TFC), cada variável de folga da restrição também está ligada à sua respectiva variável dual. Portanto, escrevemos as variáveis de folga (x_3, x_4, x_5) para o problema primal:

$$\begin{array}{lccccccc} \max \text{ z} = & 5x_1 & + & 2x_2 & & & & \\ & x_1 & & & +x_3 & & & = 3 \\ & & & x_2 & & +x_4 & & = 4 \\ & x_1 & + & 2x_2 & & & +x_5 & = 9 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq 0 & & & \end{array}$$

Pelo TFC, deduzimos as seguintes condições entre as variáveis de folga e as variáveis do dual, que devem se manter na otimalidade:

$$\begin{cases} x_3\pi_1 = 0 \\ x_4\pi_2 = 0 \\ x_5\pi_3 = 0 \end{cases}$$

Já o modelo dual com as variáveis de folga π_4 e π_5:

$$\begin{array}{lcccccccc} \min \text{ v} = & 3\pi_1 & + & 4\pi_2 & + & 9\pi_3 & & & \\ & \pi_1 & & & + & \pi_3 & -\pi_4 & & = 5 \\ & & & \pi_2 & + & 2\pi_3 & & -\pi_5 & = 2 \\ & \pi_1 & , & \pi_2 & , & \pi_3 & \geq 0 & & \end{array}$$

Da mesma forma, deduzimos às seguintes condições entre as folgas duais e as variáveis primais:

$$\begin{cases} \pi_4 x_1 = 0 \\ \pi_5 x_2 = 0 \end{cases}$$

Assim, o conjunto completo de relações fica:

$$\begin{cases} x_3\pi_1 = 0 \\ x_4\pi_2 = 0 \\ x_5\pi_3 = 0 \\ \pi_4 x_1 = 0 \\ \pi_5 x_2 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o modelo pelo método gráfico, temos que a solução ótima é $(x_1, x_2)^T = (3, 3)$, como mostrado na Figura 4
Ao substituirmos os valores de x_1 e x_2 nas equações do primal, obtemos os valores das folgas, portanto temos que:

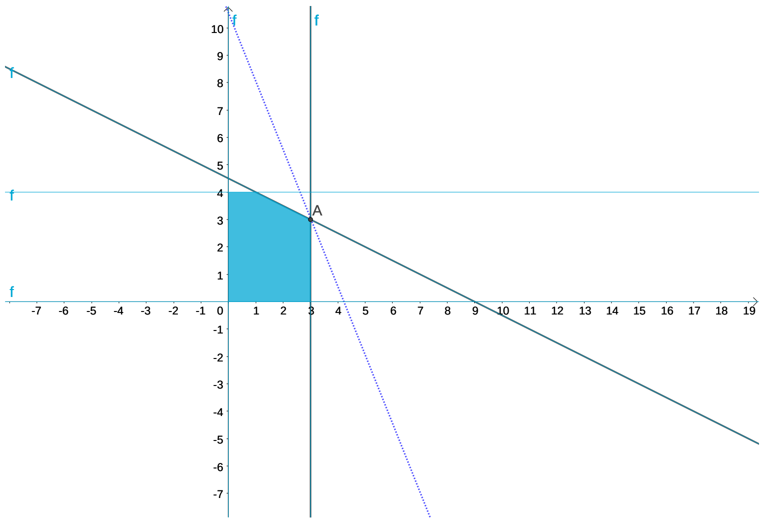

Figure 4: Solução ótima primal ex. 1a

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Com esses valores e usando as relações do TFC, sabemos que $\pi_2 = \pi_4 = \pi_5 = 0$ (pois $x_1 \geq, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0$). Ao removermos essas variáveis nulas no sistema de equações dual, temos que:

$$\begin{cases} \pi_1 + \pi_3 = 5 \\ 2\pi_3 = 2 \end{cases}$$

De forma que a solução do sistema nos dá $\pi_3 = 1$ e $\pi_1 = 4$.
Podemos confirmar que a solução é ótima pois temos que os valores das funções objetivo primal (z) e dual (v) são iguais: $z = 5(3) + 2(3) = v = 3(4) + 9(1) = 21$.

5. (**R**) Uma nutricionista deseja montar uma dieta a custo mínimo, com base em 6 alimentos diferentes (chamados 1,2,3,4,5,6). A dieta deve atingir as quantidades mínimas de vitamina C e A de 19 e 9 unidades. Cada kg de alimento contribui com uma quantidade de vitamina A e C, e tem um custo, como mostrados na Tabela 1:

   (a) Escreva o modelo de PL referente ao problema da dieta.

   RESPOSTA:
   Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_i \quad \text{Quantidade usada do alimento } i,\ i = 1, ...6 \end{cases}$$

Vitaminas	Número de unidades de nutriente por kg de comida 1	2	3	4	5	6	Demanda mínima de vitaminas
Vitamina A	1	0	2	2	1	2	9
Vitamina C	0	1	3	1	3	2	19
Custo/kg do alimento	35	30	60	50	27	22	

Table 1: Tabela de alimentos e componentes nutricionais

$$\begin{aligned}
\text{minimizar} \quad & 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6 \\
\text{Sujeito à} \quad & x_1 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 + 2x_6 \geq 9 \\
& x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 \geq 19 \\
& x_i \geq 0, i = 1, ..., 6
\end{aligned}$$

(b) Um vendedor de suplementos deseja convencer a nutricionista a comprar as suas pílulas de vitamina A e vitamina C, ao invés de atingir os valores por uma dieta alimentícia. No entanto, ele sabe que os valores cobrados pelas pílulas (π_1 e π_2) devem compensar para a nutricionista, ao mesmo tempo que devem gerar lucro para ele. Crie o modelo para o vendedor de pílulas.

RESPOSTA:

O modelo do vendedor é justamente o dual do modelo da nutricionista. Sejam as variáveis:

$$\begin{cases}
\pi_1: & \text{Preço da vitamina A em forma de pílula (reais/unidade)} \\
\pi_2: & \text{Preço da vitamina B em forma de pílula (reais/unidade)}
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & 9\pi_1 + 19\pi_2 \\
\text{Sujeito à} \quad & \pi_1 \leq 35 \\
& \pi_2 \leq 30 \\
& 2\pi_1 + 3\pi_2 \leq 60 \\
& 2\pi_1 + \pi_2 \leq 50 \\
& \pi_1 + 3\pi_2 \leq 27 \\
& 2\pi_1 + 2\pi_2 \leq 22 \\
& \pi_1, \pi_2 \geq 0
\end{aligned}$$

(c) O vendedor conseguiu descobrir a solução ótima referente ao modelo da nutricionista, com valores $\bar{x}^T = (0, 0, 0, 0, 5, 2)$. Com base nessa solução, encontre os preços ótimos para o problema do vendedor, bem como o seu lucro total (usando a resposta encontrada).

RESPOSTA:

Sabemos que a solução do problema (primal) é $\bar{x} = (0, 0, 0, 0, 5, 2)^T$. Como a cada variável primal está associada uma restrição dual, e ainda, pelo teorema das folgas complementares sabemos que as restrições referentes às variáveis x_5 e x_6 devem ser justas. Assim, temos o seguinte sistema de equações lineares no problema dual:

$$\begin{cases} \pi_1 + 3\pi_2 = 27 \\ 2\pi_1 + 2\pi_2 = 22 \end{cases}$$

Resolvendo por pivotamento, temos então que $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (3, 8)$. Dessa forma, o lucro total do vendedor é de $9 * 3 + 19 * 8 = 179$.

6. (**R**) Pelas relações existentes entre os problemas primal-dual, podemos escolher a maneira mais fácil de se obter uma resposta, seja resolvendo o dual ou o primal. Considere o modelo abaixo:

$$\begin{array}{llllllllllll} \max \text{ z} = & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & \\ & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & \leq 6 \\ & 4x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & \leq 15 \\ x_i \geq 0 & i = 1, ..., 5 \end{array}$$

Encontre a solução do modelo usando o dual e o teorema das folgas complementares (confirme a sua resposta encontrando a solução pelo solver GUSEK).

RESPOSTA:

Sabemos que para cada restrição do primal existe uma variável dual. Dessa forma, o modelo dual é composto de apenas duas variáveis, o que permite visualizarmos a região factível graficamente. O modelo dual fica:

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & 6\pi_1 + 15\pi_2 & \\ \text{Sujeito à} & \pi_1 + 4\pi_2 & \geq 2 \\ & 3\pi_1 + 6\pi_2 & \geq 5 \\ & 2\pi_1 + 5\pi_2 & \geq 3 \\ & 3\pi_1 + 7\pi_2 & \geq 4 \\ & \pi_1 + \pi_2 & \geq 1 \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 & \end{array}$$

Plotando a região factível, vetor gradiente e uma curva de nível, temos (Figura 5): Pela região factível e vetor gradiente percebemos que a solução ótima se dá na interseção das restrições 1 e 2 do problema dual. Sabemos também que cada restrição dual está vinculada a uma variável primal, como mostrado abaixo:

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & 6\pi_1 + 15\pi_2 & \\ \text{Sujeito à} & \pi_1 + 4\pi_2 & \geq 2 \rightarrow x_1 \\ & 3\pi_1 + 6\pi_2 & \geq 5 \rightarrow x_2 \\ & 2\pi_1 + 5\pi_2 & \geq 3 \rightarrow x_3 \\ & 3\pi_1 + 7\pi_2 & \geq 4 \rightarrow x_4 \\ & \pi_1 + \pi_2 & \geq 1 \rightarrow x_5 \\ & \pi_1, \pi_2 \geq 0 & \end{array}$$

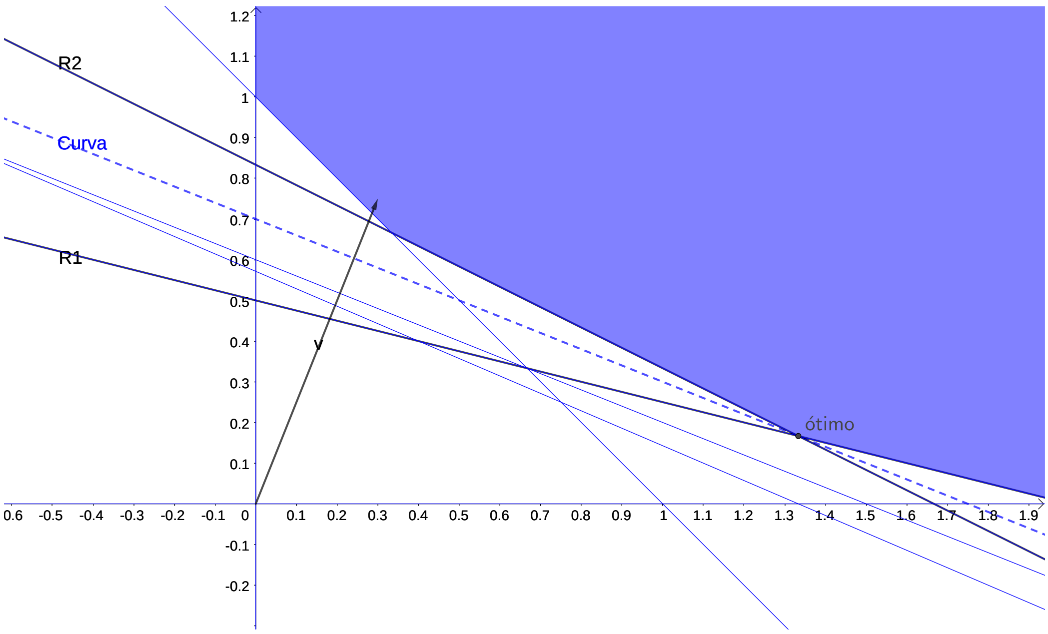

Figure 5: Região factível problema dual

Ainda, sabemos que pelo teorema das folgas complementares, as variáveis de folga do dual estão atreladas às variáveis do primal, sendo que quando uma tem valor estritamente positivo, a outra deve ter valor zerado. Como as restrições 1 e 2 são ativas, sabemos que as outras *não são*, o que implica que suas folgas possuem valores > 0. Ainda, graficamente vemos que π_1 e π_2 possuem valores. As variáveis ficam então:

$$\begin{cases} \pi_1 \geq 0 \\ \pi_2 \geq 0 \\ \pi_3 = 0 \\ \pi_4 = 0 \\ \pi_5 \geq 0 \\ \pi_6 \geq 0 \\ \pi_7 \geq 0 \\ \pi_8 \geq 0 \end{cases}$$

Montando as relações do teorema das folgas complementares, temos que:

$$\begin{cases} \pi_1 x_7 = 0 \rightarrow x_7 = 0 \\ \pi_2 x_8 = 0 \rightarrow x_8 = 0 \\ \pi_3 x_1 = 0 \\ \pi_4 x_2 = 0 \\ \pi_5 x_3 = 0 \rightarrow x_3 = 0 \\ \pi_6 x_4 = 0 \rightarrow x_4 = 0 \\ \pi_7 x_5 = 0 \rightarrow x_5 = 0 \\ \pi_8 x_6 = 0 \rightarrow x_6 = 0 \end{cases}$$

Substituindo esses valores no modelo primal (forma padrão) ficamos com o sistema de duas equações e duas variáveis:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 4x_1 + 6x_2 = 15 \end{cases}$$

Aplicando as seguintes operações para deixar o sistema na forma canônica em relação a x_1 e x_2:

- $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$
- $L_2 \leftarrow L_2 / -6$
- $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$

Temos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad = 3/2 \\ \quad\quad x_2 = 3/2 \end{cases}$$

Com valor da função objetivo de $z = 10.5$