

Dualidade: Modelos e Teoremas

1. **(R)** Para cada um dos modelos de PL abaixo, escreva o seu dual (*usando a definição de dualidade*).

$$\begin{array}{rcl}
 \max z = & 5x_1 & + \quad 2x_2 \\
 & x_1 & \leq 3 \\
 \text{(a)} & & x_2 \leq 4 \\
 & x_1 & + \quad 2x_2 \leq 9 \\
 & x_1 & , \quad x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \min z = & x_1 & + \quad 2x_2 \\
 & -2x_1 & + \quad x_2 \leq 3 \\
 \text{(b)} & 3x_1 & + \quad 4x_2 \leq 5 \\
 & x_1 & - \quad x_2 \leq 2 \\
 & x_1 & , \quad x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \max z = & 5x_1 & + \quad 2x_2 \\
 & x_1 & \leq 3 \\
 \text{(c)} & & x_2 \leq 4 \\
 & x_1 & + \quad 2x_2 \leq 9 \\
 & x_1 \geq 0 & , \quad x_2 \text{ irrestrito}
 \end{array}$$

2. **(R)** Para cada um dos modelos do exercício anterior, encontre o dual usando a tabela de conversão.
3. **(R)** Uma fábrica produz dois artigos A e B, que devem passar por duas máquinas diferentes M1 e M2. M1 tem 12 horas de capacidade diária disponível e M2 tem 5 horas. Cada unidade de produto A requer 2 horas em ambas as máquinas. Cada unidade de produto B requer 3 horas em M1 e 1 hora em M2. O lucro líquido de A é de R\$ 60,00 por unidade e o de B, R\$ 70,00 por unidade. Você trabalha em uma empresa que aluga máquinas do tipo M1 e M2, e ficou sabendo dos dados de produção dos produtos A e B da empresa. Você tem interesse em alugar as suas máquinas para a empresa, de forma a gerar lucro, e deseja usar as informações que obteve da empresa para criar um modelo de PL que te auxilie nesse tarefa. Com base nisso, faça o que se pede:

- (a) Escreva o modelo de PL para o problema da empresa.
- (b) Escreva o modelo de PL para o seu problema.
- (c) Por algum motivo qualquer, nesse momento nem você e nem a empresa possuem um solver para encontrar as soluções ótimas, de forma que devem tentar encontrar as melhores soluções manualmente (sem o método gráfico também!). Você fica sabendo que a empresa conseguiu encontrar uma solução factível para o problema com lucro total de $z = 240$. Da mesma forma você está tentando encontrar soluções para o seu problema antes de ir fazer uma proposta para a empresa, e a sua melhor solução tem um custo de $v = 310$. O seu chefe afirma que você não deve parar de buscar soluções até encontrar uma em que o custo é de $v = 230$ (pois ele imagina que com esse valor a oferta será irrecusável). O que você pode afirmar sobre a intuição do seu chefe? Se baseie nos teoremas da dualidade para compor o seu argumento.
- (d) Agora você têm acesso a um solver muito potente (GUSEK), e consegue utilizá-lo para encontrar uma solução. Encontre a solução ótima pelo solver.
- (e) Seu chefe é um homem muito desconfiado, e não acredita que a resposta que você encontrou é a ótima (embora ele conheça os teoremas de dualidade e acredite neles). Como

você pode provar que a sua solução é de fato ótima? (DICA: convença-o pela utilização dos teoremas).

4. **(R)** Considerando os modelos primal-dual encontrados no exercício 1a, adicione as folgas aos modelos e crie os relacionamentos entre as variáveis de um e as folgas da outro (relação dada pelo teorema das folgas complementares). Em seguida resolva o modelo primal pelo método gráfico, e use os relacionamentos para encontrar a solução do problema dual. Verifique se as soluções são de fato ótimas (também usando os teoremas).
5. **(R)** Uma nutricionista deseja montar uma dieta a custo mínimo, com base em 6 alimentos diferentes (chamados 1,2,3,4,5,6). A dieta deve atingir as quantidades mínimas de vitamina C e A de 19 e 9 unidades. Cada kg de alimento contribui com uma quantidade de vitamina A e C, e tem um custo, como mostrados na Tabela 1:

| Vitaminas | Número de unidades de nutriente por kg de comida | | | | | | Demanda mínima de vitaminas |
|----------------------|--|----|----|----|----|----|-----------------------------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| Vitamina A | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 9 |
| Vitamina C | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 19 |
| Custo/kg do alimento | 35 | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 | |

Table 1: Tabela de alimentos e componentes nutricionais

- (a) Escreva o modelo de PL referente ao problema da dieta.
 - (b) Um vendedor de suplementos deseja convencer a nutricionista a comprar as suas pílulas de vitamina A e vitamina C, ao invés de atingir os valores por uma dieta alimentícia. No entanto, ele sabe que os valores cobrados pelas pílulas (π_1 e π_2) devem compensar para a nutricionista, ao mesmo tempo que devem gerar lucro para ele. Crie o modelo para o vendedor de pílulas.
 - (c) O vendedor conseguiu descobrir a solução ótima referente ao modelo da nutricionista, com valores $\bar{x}^T = (0, 0, 0, 0, 5, 2)$. Com base nessa solução, encontre os preços ótimos para o problema do vendedor, bem como o seu lucro total (usando a resposta encontrada).
6. **(R)** Pelas relações existentes entre os problemas primal-dual, podemos escolher a maneira mais fácil de se obter uma resposta, seja resolvendo o dual ou o primal. Considere o modelo abaixo:

$$\begin{aligned}
 \max z = & \quad 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 \\
 & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & \leq 6 \\
 & 4x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & x_5 & \leq 15 \\
 x_i \geq 0 & \quad i = 1, \dots, 5
 \end{aligned}$$

Encontre a solução do modelo usando o dual e o teorema das folgas complementares (confirme a sua resposta encontrando a solução pelo solver GUSEK).