Método Gráfico & GUSEK

1. A área sombreada do gráfico da Figura 1 representa a região factível de um problema de programação linear cuja função objetivo deve ser **maximizada**.

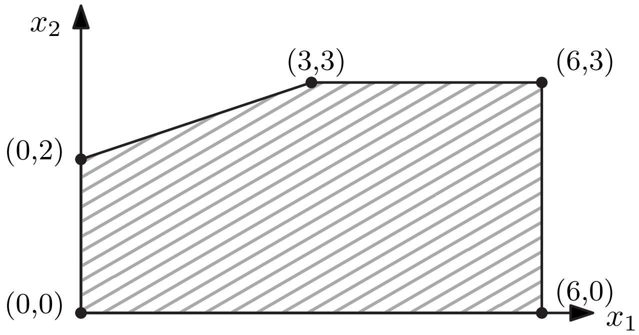

Figura 1: Região factível

Classifique cada uma das afirmações seguintes como Verdadeira ou Falsa e, a seguir, justifique sua resposta baseando-se no método gráfico. Em cada caso, dê um exemplo de uma função objetivo que ilustre sua resposta (dica: monte a função objetivo a partir do vetor gradiente).

(a) Se (3,3) produz um valor maior da função objetivo do que (0,2) e (6,3), então (3,3) deve ser uma solução ótima. **RESPOSTA:** Verdadeiro.Se o ponto (3,3) é maior do que (0,2) e (6,3), então a função objetivo está aumentando na direção de (3,3) (ou muito próxima), sabendo disto, e também que o ótimo sempre estará em um vértice, (3,3) deve ser o ótimo, pois é o único vértice nesta direção.

(b) Se (3,3) for uma solução ótima e existirem soluções ótimas múltiplas, então (0,2) ou (6,3) também têm que ser uma solução ótima. **RESPOSTA:** Verdadeiro. Se o ponto (3,3) é uma solução ótima, e existem múltiplas soluções ótimas, o conjunto de soluções ótimas deve ser uma reta com (3,3) nela. Pelas restrições só existem duas possibilidades: a reta com (3,3) e (0,2) e a reta com (3,3) e (6,3).

(c) O ponto (0,0) não pode ser uma solução ótima. **RESPOSTA:** Falso. (0,0) pode ser uma solução ótima, tudo depende da função objetivo do problema. Por exemplo, a função:

$$z = -x_1 - x_2 \tag{1}$$

Gera um vetor gradiente na direção do ponto (0,0).

2. Ainda considerando a Figura 1, encontre uma função objetivo de forma que ambos os pontos (6,3) e (3,3) sejam ótimos, e outra em que ambos os pontos (6,3) e (6,0) sejam ótimos(considerando um problema de maximização).
RESPOSTA:
Considerando (6,3) e (3,3) temos a função:

$$z = x_2 \tag{2}$$

Considerando (6,3) e (6,0) temos a função:

$$z = x_1 \tag{3}$$

3. A Figura 2 representa 4 casos que podem ocorrer durante a resolução de um problema de PL com objetivo de maximização. Marque a opção correta referente à cada uma das imagens (na ordem a,b,c e d):

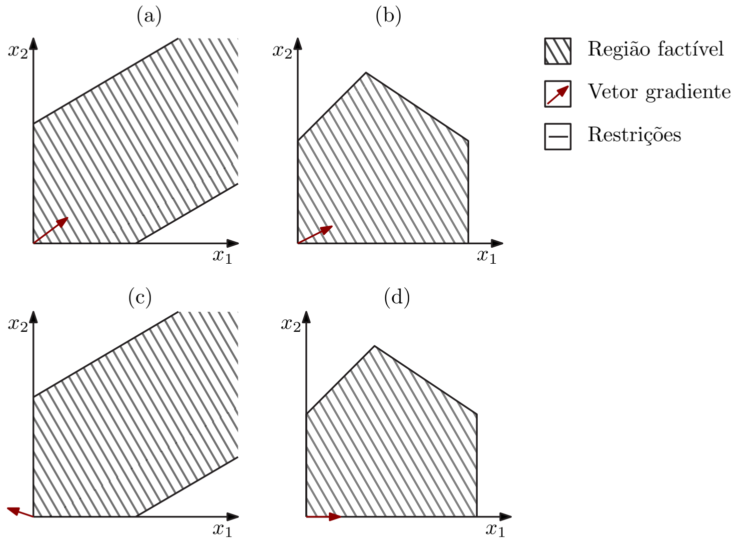

Figura 2: Casos em um PL

   (a) Região factível ilimitada com solução ótima, região factível limitada com solução ótima, região factível ilimitada sem solução ótima e região factível limitada com múltiplas soluções ótimas.
   (b) Região factível ilimitada sem solução ótima, região factível limitada com solução ótima, região factível ilimitada com solução ótima e região factível limitada com múltiplas soluções ótimas.
   (c) Região factível ilimitada sem solução ótima, região factível limitada com solução ótima, região factível ilimitada sem solução ótima e região factível limitada com uma solução ótima.
   (d) Região factível ilimitada com solução ótima, região factível limitada sem solução ótima, região factível ilimitada sem solução ótima e região factível limitada com múltiplas soluções ótimas.

   RESPOSTA: b - Região factível ilimitada sem solução ótima, região factível limitada com solução ótima, região factível ilimitada com solução ótima e região factível limitada com múltiplas soluções ótimas.

4. Para cada um dos problemas a seguir (todos da lista de **Modelagem I**), escreva o modelo de programação linear (PL), resolva pelo método gráfico e verifique a sua solução usando o software GUSEK.
   (a) Certa empresa fabrica 2 produtos P1 e P2. O lucro por unidade de P1 é de 100 reais e o lucro unitário de P2 é de 150 reais. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de P1 e 3 horas para fabricar uma unidade de P2. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de P1 e P2 não devem ultrapassar 40 unidades de P1 e 30 unidades de P2 por mês.

RESPOSTA:

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade do produto P1 produzido por mês.} \\ x_2 : \text{Quantidade do produto P2 produzido por mês.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{array}{lrl} \max & Z(x_1, x_2) = 100x_1 + 150x_2 & \\ \text{Sujeito à} & 2x_1 + 3x_2 & \leq 120 \\ & x_1 & \leq 40 \\ & x_2 & \leq 30 \\ & x_1, x_2 & \in R^+ \end{array}$$

A região factível, vetor gradiente e soluções são mostradas na Figura 3. Pela Figura percebe-se que existem múltiplas soluções ótimas, duas são mostradas (pontos A e B na Figura), com valor de z = 6000.

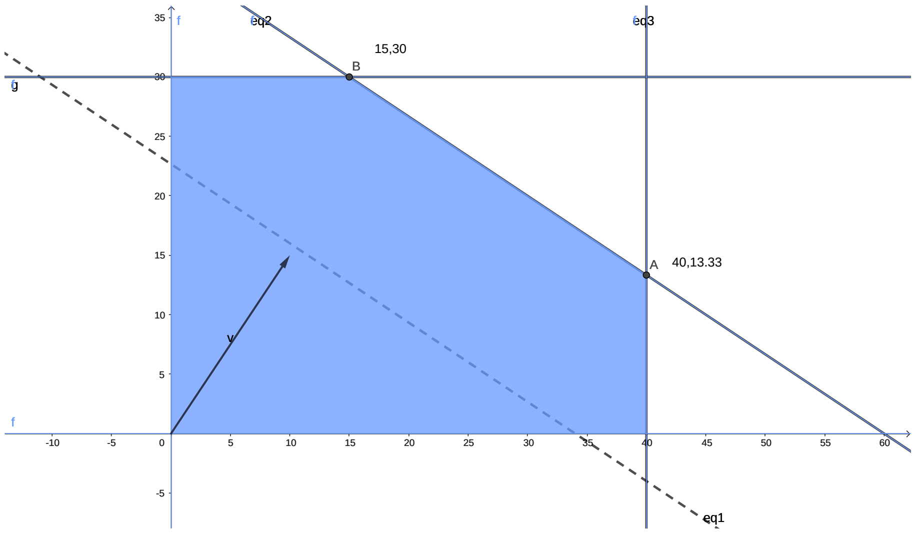

Figura 3: Sistema exercício 4a

(b) Uma fábrica produz dois artigos A e B, que devem passar por duas máquinas diferentes M1 e M2. M1 tem 12 horas de capacidade diária disponível e M2 tem 5 horas. Cada unidade de produto A requer 2 horas em ambas as máquinas. Cada unidade de produto B requer 3 horas em M1 e 1 hora em M2. O lucro líquido de A é de R$ 60,00 por unidade e o de B, R$ 70,00 por unidade. Formular o modelo matemático de modo a determinar a quantidade a ser produzida de A e B a fim de se ter um lucro máximo. (Assumir que as quantidades podem ser fracionárias)

Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_a : \text{Quantidade produzida do produto A.} \\ x_b : \text{Quantidade produzida do produto B.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(x_a, x_b) = 60x_a + 70x_b \\ \text{Sujeito à} \quad & 2x_a + 3x_b \leq 12 \\ & 2x_a + x_b \leq 5 \\ & x_a, x_b \in R^+ \end{aligned}$$

A região factível, vetor gradiente e soluções são mostradas na Figura 4. A solução é dada pelo ponto A (0.75,3.5) com valor de z = 290.

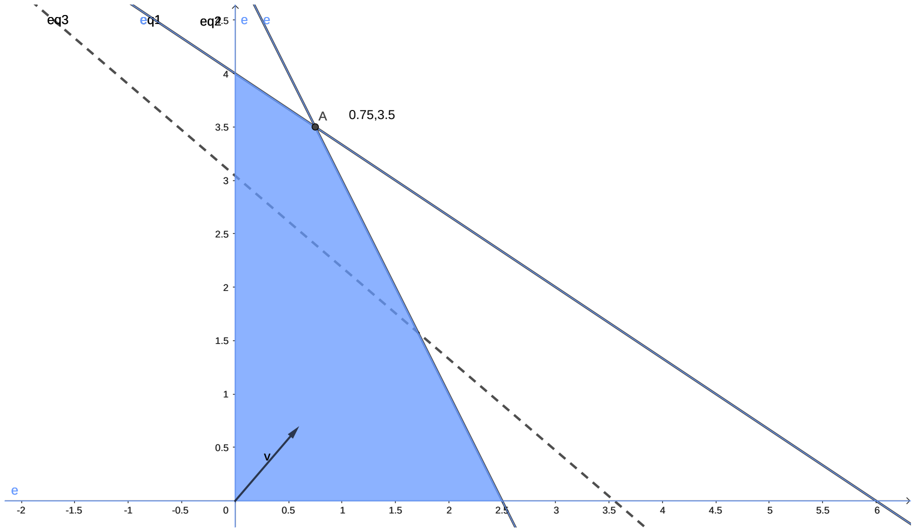

Figura 4: Sistema exercício 4b

(c) Um sapateiro faz 6 sapatos por hora, se fizer somente sapatos, e 5 cintos por hora se fizer somente cintos. Ele gasta 2 unidades de couro para fabricar 1 unidade de sapato e 1 unidade de couro para fabricar uma unidade de cinto. Sabendo que o total disponível de couro é de 6 unidades e que o lucro unitário por sapato é de 5 unidades e o do cinto é de 2 unidades, formular o modelo que maximize lucro por hora. Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_1 : \text{Quantidade sapatos produzidos/hora} \\ x_2 : \text{Quantidade cintos produzidos/hora.} \end{cases}$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito à} \quad & 10x_1 + 12x_2 \leq 60 \\ & 2x_1 + 1x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{aligned}$$

A região factível, vetor gradiente e uma curva de nível são mostrados na Figura 5. Pelo gráfico, percebemos que a solução ótima está na interseção de:

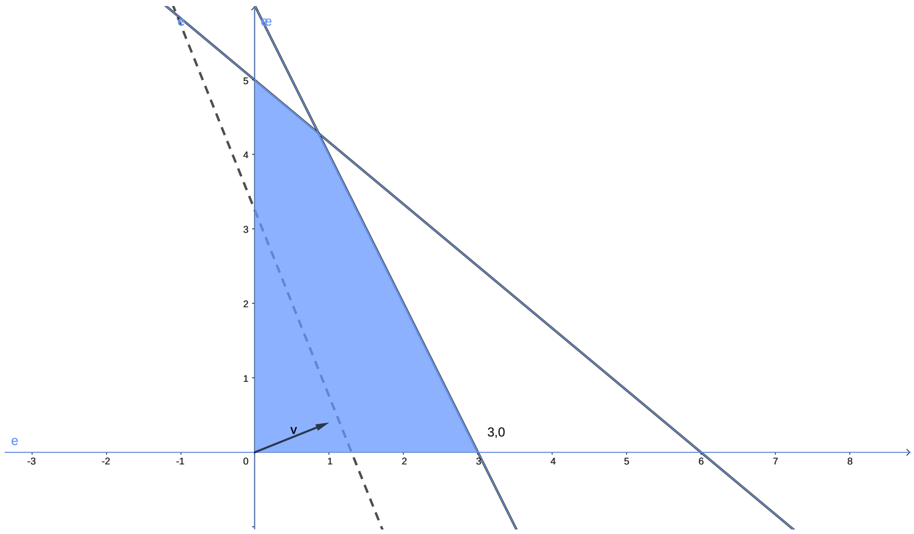

Figura 5: Sistema exercício 4c

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 & = 6 \\ x_2 & = 0 \end{cases}$$

Assim, a solução ótima é $x^T = (x_1, x_2) = (3, 0)$, com lucro total de 15.

5. Para cada um dos modelos abaixo, encontre a solução ótima pelo método gráfico (plote a região factível, encontre o vetor gradiente e resolva o sistema). Verifique suas soluções usando o software GUSEK.

   (a)

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{Sujeito à} \quad & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & 5x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{aligned}$$

A região factível, vetor gradiente e curva de nível ficam como na Figura 6.

Assim, o ponto ótimo está na interseção das retas:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 5 \\ 5x_1 + x_2 & = 10 \end{cases}$$

Escrevendo o sistema na forma de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Podemos resolver o sistema aplicando as operações para deixa-lo na forma canônica em relação a x_1 e x_2:

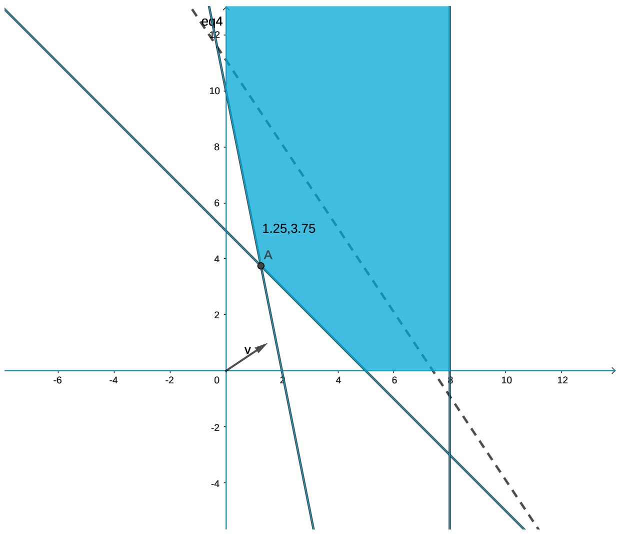

Figura 6: Sistema exercício 5a

$L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -15 \end{bmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2/-4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 15/4 \end{bmatrix}$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5/4 \\ 0 & 1 & 15/4 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema original é equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 & = 5/4 \\ 0x_1 + x_2 & = 15/4 \end{cases}$$

Portanto, a solução ótima é $x^T = (x_1, x_2) = (5/4, 15/4) = (1.25, 3.75)$, com valor objetivo de z = 11.25.

(b)

$$\begin{aligned} \text{min} \qquad & f(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{Sujeito à} \qquad & 4x_1 + 6x_2 \leq 60 \\ & x_1 + x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{aligned}$$

A região factível, vetor gradiente e soluções são mostradas na Figura 7. Pela Figura 7 percebe-se que a solução ótima está no ponto A (12,0), com valor de z = 24.

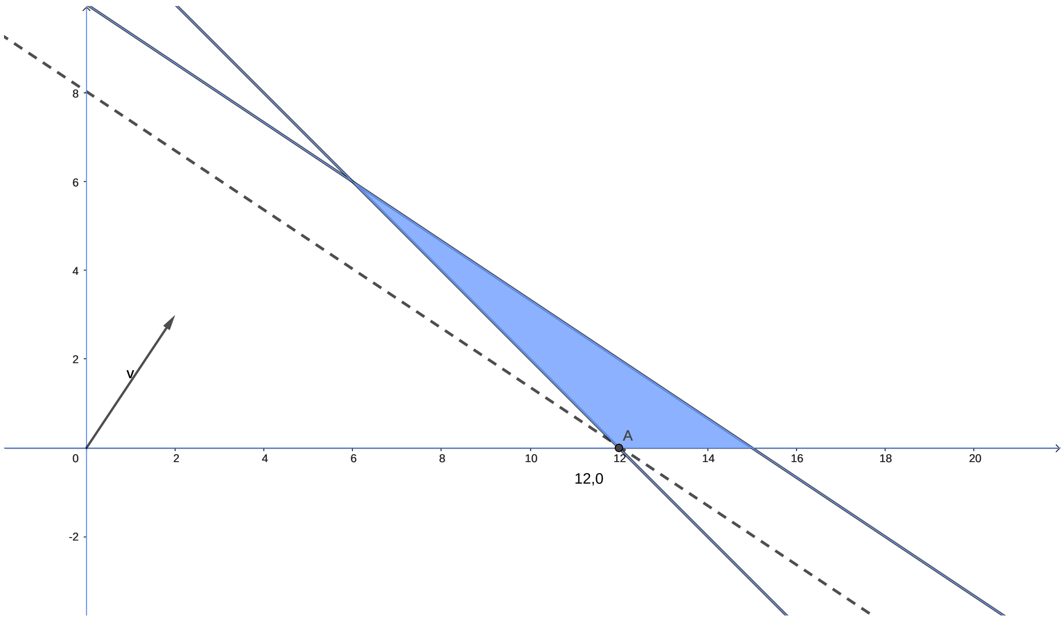

Figura 7: Sistema exercício 5b

(c)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = 0.3x_1 + 0.5x_2 \\ \text{Sujeito à} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{aligned}$$

A região factível, vetor gradiente e soluções são mostradas na Figura 8. Pela Figura 8 percebe-se que a solução ótima está no ponto A (0.6,0.8), com valor de z = 0.58.

(d)

$$\begin{aligned} \text{max} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 + 0.5x_2 \\ \text{Sujeito à} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \in R^+ \end{aligned}$$

A região factível, vetor gradiente e soluções são mostradas na Figura 9. Pela Figura 9 percebe-se que existem múltiplas soluções ótimas, duas são mostradas na Figura (pontos A = (0.6,0.8) e B = (1,0)), com z = 1.

6. Resolva os seguintes modelos de programação linear usando o Software GUSEK (todos modelos das listas 1 e 2).

   (a) (**R**) Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:

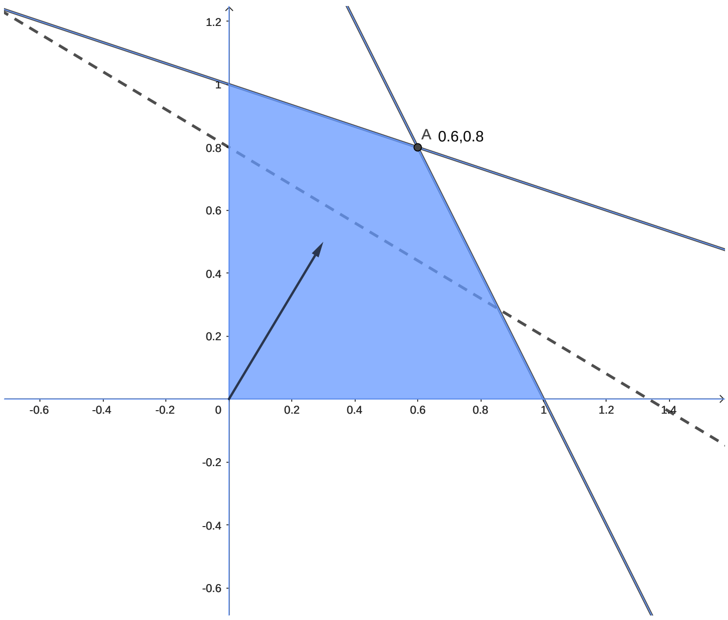

Figura 8: Sistema exercício 5c

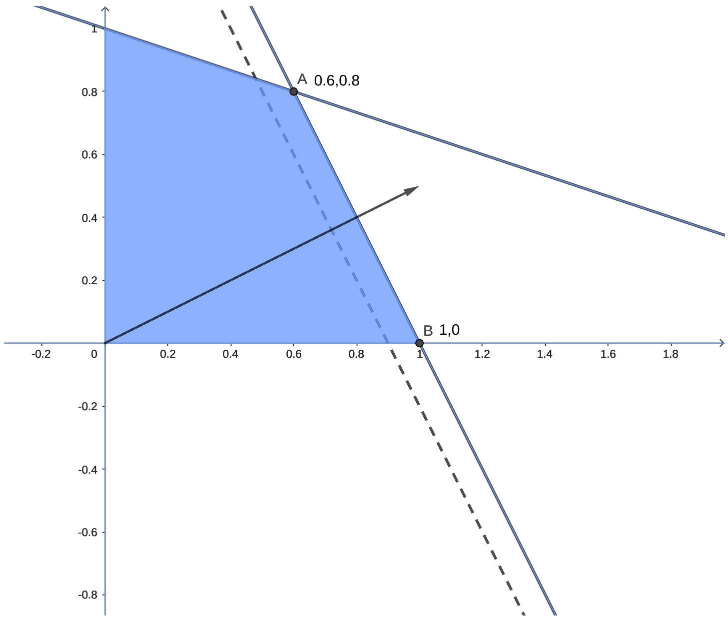

Figura 9: Sistema exercício 5d

a - Arrendamento : - Destinar certa quantidade de alqueires para a plantação de cana de açúcar a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra R$ 300,00 por alqueire por ano;

b - Pecuária : - Usar outra parte para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100 kg/alqueire) e irrigação(100.000 litros de água/alqueire) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de R$400,00 por alqueire por ano.
c - Plantio de Soja : Usar uma terceira parte para o plantio de soja. Essa cultura requer 200 kg por alqueire de adubos e 200.000 litros de água por alqueire para irrigação por ano. O lucro estimado nessa atividade é de R$500,00 por alqueire por ano. A disponibilidade de recursos por ano é de 12.750.000 litros de água, 14.000 kg de adubo e 100 alqueires de terra. Quantos alqueires deverão ser destinados a cada atividade para proporcionar o melhor retorno? Construa o modelo de decisão.

(b) Um avião de carga possui 3 compartimentos para armazenamento de carga: anterior, central e posterior. Esses compartimentos possuem limites na capacidade de carga, tanto em termos de *peso* quanto de *espaço*, conforme sintetizada na Tabela 1:

Tabela 1: Capacidade dos compartimentos do avião

Compartimento	**Capacidade em peso (t)**	**Capacidade em volume** pes^3
Anterior	12	7.000
Central	18	9.000
Posterior	10	5.000

Além disso, o peso da carga no respectivo compartimento deve ser da mesma proporção da capacidade de peso desse compartimento para manter o equilíbrio da aeronave. As quatro cargas mostradas na Tabela 2 podem ser embarcadas no próximo voo, uma vez que há espaço disponível.

Tabela 2: Cargas que podem ser transportadas

Carga	**Peso(t)**	**Volume(**pes^3**/t)**	**Lucro(US$/t)**
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	13	400	290

Qualquer parcela dessa carga pode ser aceita. O objetivo é determinar quanto (se alguma) de cada carga deve ser aceita e como distribuir cada uma delas entre os compartimentos de modo a maximizar o lucro total por voo. Formule um modelo de programação linear para este problema.