Álgebra I

OBS: Diversos exercícios dessa lista podem ter suas soluções verificadas usando o software Geogebra

Solução de sistemas 3X3: (vídeo)

1. O que quer dizer um sistema estar na forma canônica? Dê um exemplo para um sistema 2x2, 3x3 e 3x4.

   RESPOSTA:
   Um sistema canônico é aquele que pode ser escrito na forma:

$$Ix_B + \bar{A}x_N = b \tag{1}$$

   Ou seja, existe uma submatriz identidade (I) acompanhando um conjunto de variáveis (x_B), e outra submatriz ($\bar{A}$) acompanhando as variáveis x_N. Como deve haver uma matriz identidade, e a mesma deve ser quadrada, para sistemas com o mesmo número de variáveis e incógnitas só pode existir a matriz I. Exemplos abaixo:

   (a) 2x2

$$\begin{aligned} x_1 \quad &= 12 \\ x_2 &= 5 \end{aligned}$$

   (b) 3x3

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &= 12 \\ x_2 \quad &= 5 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}$$

   (c) 3x4

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad +3x_5 &= 12 \\ x_2 \quad +2x_5 &= 5 \\ x_3 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

2. Para cada um dos sistemas abaixo, identifique se ele está na forma canônica ou não. Se sim, identifique quais são os termos como na equação 2 (lembre-se de que alterar as colunas de um sistema não altera as soluções do mesmo). DICA: Escreva os sistemas em forma matricial e busque pela matriz identidade I de m elementos (m = n^o de linhas), se ela não existir, o sistema **não** é canônico.

   (a)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad &= 12 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

RESPOSTA:
Sim,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_N = \begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned} x_1 + 12x_2 + x_3 &= 60 \\ x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

RESPOSTA:
Não.

(c)

$$\begin{aligned} x_1 + 12x_2 \quad\quad &= 60 \\ x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ x_2 \quad\quad + x_4 &= 20 \end{aligned}$$

RESPOSTA:
Sim,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \bar{A} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_N = \begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 60 \\ 6 \\ 20 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{aligned} x_1 + 12x_2 \quad\quad &= 60 \\ x_2 + x_3 \quad &= 6 \\ x_2 \quad\quad - x_4 &= 20 \end{aligned}$$

RESPOSTA:
Não

3. Encontre a solução dos sistemas lineares abaixo, se o sistema possuir 2 variáveis, represente a solução graficamente (plote as retas). Faça as transformações dos sistemas para a forma canônica usando o **pivoteamento**, e reescreva-o na forma.

$$Ix_B + \bar{A}x_N = b \tag{2}$$

Identificando todos os termos termos.

(a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 3x_1 - 4x_2 = 4 \end{cases}$

RESPOSTA:
Sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
- $L_2 \leftarrow L_2 / -10$
- $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Reescrevendo na forma canônica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Note que neste caso a matriz $\bar{A}$ pode ser

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O que não invalida o sistema como canônico, o que não pode ocorrer é a falta da submatriz I. O sistema é representado na Figura 1.

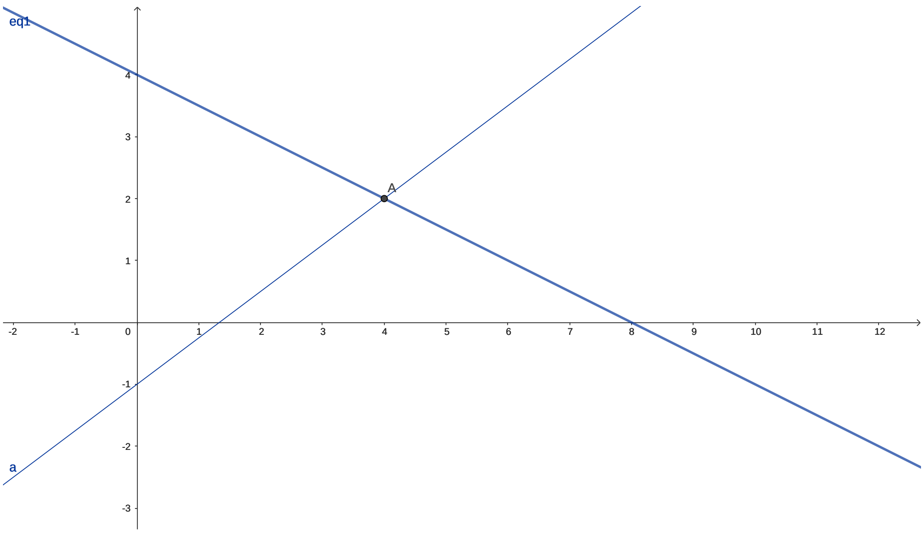


Figura 1: Sistema exercício 3a

(b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

RESPOSTA:
Sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_1 \leftarrow L_1/3$
- $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$
- $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

O sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 2/3 & 16/3 \\ 0 & -5/3 & 2/3 & 10/3 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_2 \leftarrow L_2/(-2/3)$
- $L_1 \leftarrow L_1 - 2/3L_2$
- $L_3 \leftarrow L_3 + 5/3L_2$

O sistema fica: O sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -10 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_3 \leftarrow L_3/-1$
- $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$
- $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

O sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

Que já está na forma canônica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}}_{b}$$

(c) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = -12 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 15 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -8 \end{cases}$

RESPOSTA:
Sistema na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & -12 \\ 2 & -3 & -4 & 15 \\ 3 & 4 & 5 & -8 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_1 \leftarrow L_1/2$
- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
- $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$

O sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -7 & -10 & 27 \\ 0 & -2 & -4 & 10 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_2 \leftarrow L_2/-7$
- $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$
- $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$

O sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/7 & 12/7 \\ 0 & 1 & 10/7 & -27/7 \\ 0 & 0 & -8/7 & 16/7 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_3 \leftarrow L_3/(-8/7)$
- $L_2 \leftarrow L_2 - (10/7)L_3$
- $L_1 \leftarrow L_1 - (1/7)L_3$

O sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Que já está na forma canônica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}}_{b}$$

4. Para cada um dos sistemas abaixo, faça:

   A. Realize o pivoteamento para deixar o sistema na forma canônica, com relação as variáveis indicadas.
   B. Para cada sistema na forma canônica, determine uma solução viável para o mesmo.
   C. Identifique os elementos da equação 2.

   (a) Com relação a (x_1, x_2) e (x_2, x_3).

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 12 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$

RESPOSTA:

Com relação a (x_1,x_2):
A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_1 \leftarrow L_1/2$
- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

Temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 6 \\ 0 & -2 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_2 \leftarrow L_2/-2$
- $L_1 \leftarrow L_1 - (3/2)L_2$

Temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 7/2 \end{bmatrix}$$

B. Uma solução para o sistema é:

$$\begin{cases} x_N^T = (x_3) = (0) \\ x_B^T = (x_1, x_2) = (3/4, 7/2) \end{cases}$$

C. Os elementos na forma canônica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3/4 \\ 7/2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Com relação a (x_2,x_3):
A.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_1 \leftarrow L_1/3$
- $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

Temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1 & 1/3 & 4 \\ 4/3 & 0 & 2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_2 \leftarrow L_2/(2/3)$
- $L_1 \leftarrow L_1 - (1/3)L_2$

Temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 7/2 \\ 2 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

B. Uma solução para o sistema é:

$$\begin{cases} x_N^T = (x_1) = (0) \\ x_B^T = (x_2, x_3) = (7/2, 3/2) \end{cases}$$

C. Os elementos na forma canônica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}}_{b}$$

(b) Com relação a (x_1, x_2) e (x_1, x_3).

$$\begin{aligned} 10x_1 + 12x_2 + x_3 &= 60 \\ 2x_1 + \quad x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

RESPOSTA:

Com relação a (x_1,x_2):
A.

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 1 & 60 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_1 \leftarrow L_1/10$
- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

Temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6/5 & 1/10 & 6 \\ 0 & -7/5 & 4/5 & -6 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_2 \leftarrow L_2/(-7/5)$
- $L_1 \leftarrow L_1 - (6/5)L_2$

Temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/14 & 6/7 \\ 0 & 1 & -4/7 & 30/7 \end{bmatrix}$$

B. Uma solução para o sistema é:

$$\begin{cases} x_N^T = (x_3) = (0) \\ x_B^T = (x_1, x_2) = (6, 30/7) \end{cases}$$

C. Os elementos na forma canônica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 11/14 \\ -4/7 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 7/2 \end{bmatrix}}_{b}$$

Com relação a (x_1,x_3):
A.

$$\begin{bmatrix} 10 & 12 & 1 & 60 \\ 2 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_1 \leftarrow L_1/10$
- $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

Temos o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 6/5 & 1/10 & 6 \\ 0 & -7/5 & 4/5 & -6 \end{bmatrix}$$

Aplicando as operações (na ordem):

- $L_2 \leftarrow L_2/(4/5)$
- $L_1 \leftarrow L_1 - (1/10)L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 11/18 & 0 & 27/4 \\ 0 & -7/4 & 1 & -15/2 \end{bmatrix}$$

B. Uma solução para o sistema é:

$$\begin{cases} x_N^T = (x_2) = (0) \\ x_B^T = (x_1, x_3) = (27/4, -15/2) \end{cases}$$

C. Os elementos na forma canônica:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 27/4 \\ -15/2 \end{bmatrix}}_{\bar{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}}_{b}$$

5. Para cada um dos sistemas de inequações abaixo, represente a região de soluções (intersecção das áreas) graficamente. OBS: 1. a expressão $x_1, x_2 \in R^+$ é equivalente a $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ 2. algumas regiões **não possuem intersecção**.

(a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 5 \end{aligned}$$

RESPOSTA:

A região do exercício 5a é mostrado na Figura 2.

(b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 5 \end{aligned}$$

RESPOSTA:

A região do exercício 5b é mostrado na Figura 3.

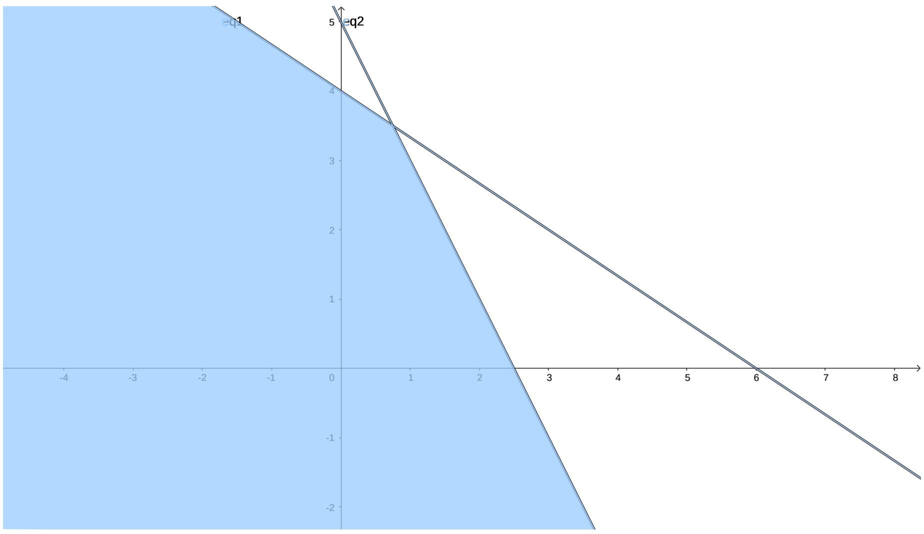


Figura 2: Região 5a

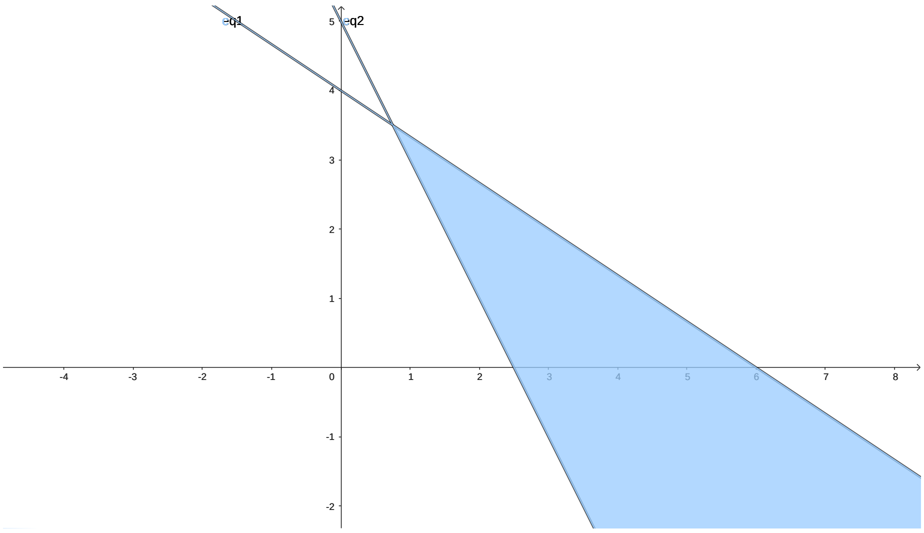


Figura 3: Região 5b

(c)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\geq 12 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 5 \end{aligned}$$

RESPOSTA:

A região do exercício 5c é mostrado na Figura 4.

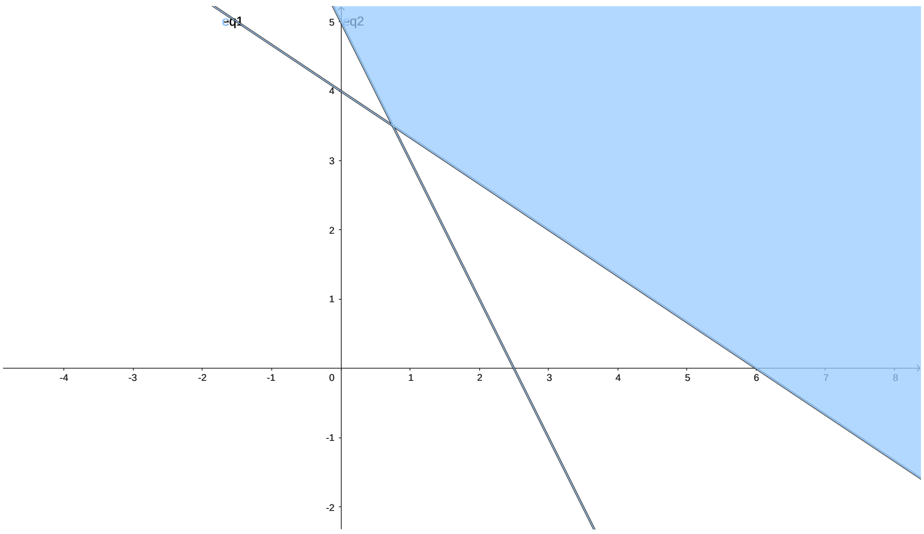


Figura 4: Região 5c

(d)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1 \quad\quad &\leq 10 \\ x_2 &\leq 8 \\ x_1, x_2 &\in R^+ \end{aligned}$$

RESPOSTA:

A região do exercício 5d é mostrado na Figura 5.

6. Sabe-se que o vetor gradiente de uma função f (∇f) indica a direção de maior crescimento de uma função em um ponto. Para cada uma das funções abaixo, represente o vetor gradiente graficamente, bem como uma curva de nível (lembre-se de que as curvas de nível para funções lineares são perpendiculares ao vetor gradiente).

   (a) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$
   (b) $f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$
   (c) $f(x_1, x_2) = 3x_2$
   (d) $f(x_1, x_2) = -x_1 - 2x_2$

   RESPOSTA:

   Os gradientes são mostrados nas Figuras 6 e 7.

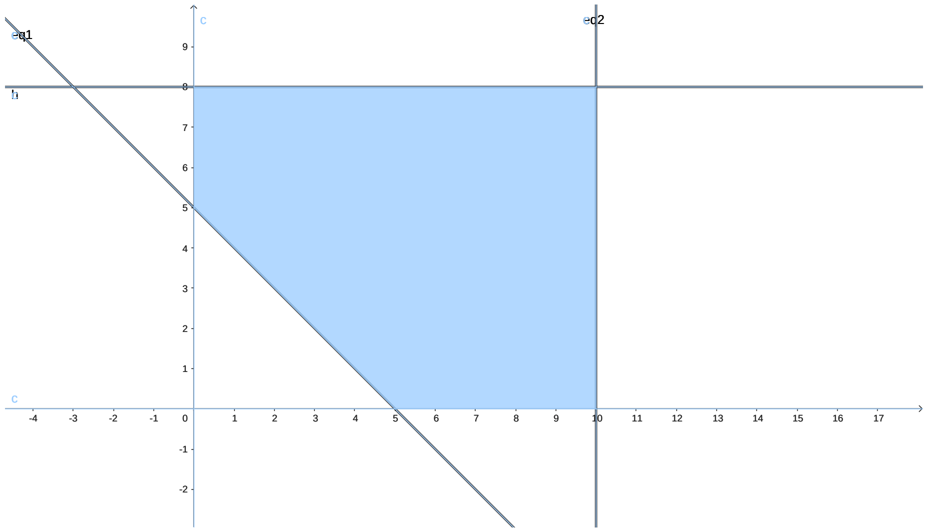
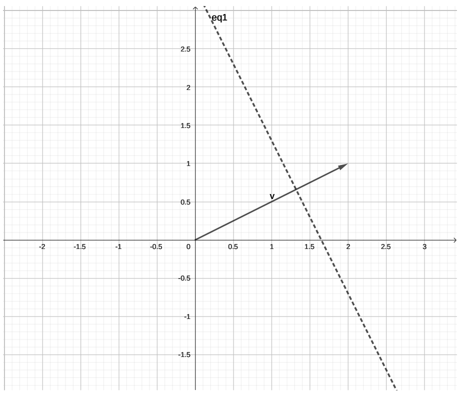
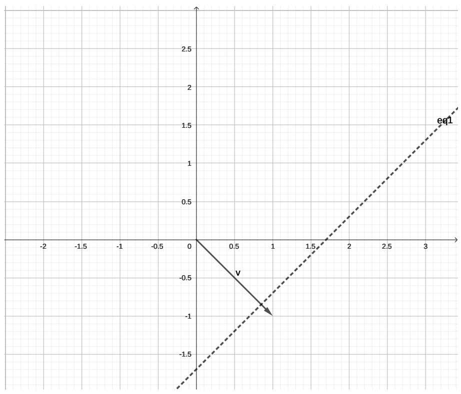


Figura 5: Região 5d

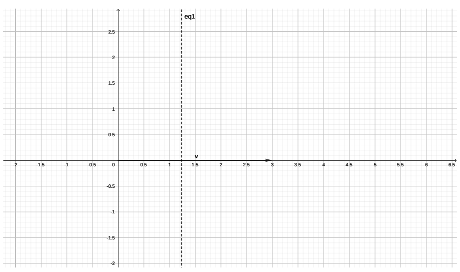


(a) 6a

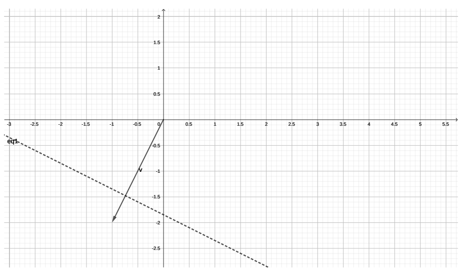


(b) 6b

Figura 6: Gradientes exercícios 6a e 6b



(a) 6c



(b) 6d

Figura 7: Gradientes exercícios 6c e 6d