Modelagem II

1. (**R**) Uma empresa quer decidir qual o plano de produção ótimo para o produto X. O custo de manter o produto X em estoque do período t ao $t+1$ é de R$2,00, a capacidade produtiva da planta é de 30un. de X/período. Considere as demandas de X para 3 períodos como D = (20, 35, 40) e que no momento, existe um estoque de 5un. de X. Escreva o modelo de programação linear que minimiza os custos de estocagem de X, atendendo a todas as demandas sem exceder a capacidade produtiva da planta.

   Sejam as variáveis:

   $$\begin{cases} x_t : \text{Quantidade produzida de X no período } t, \quad t = 1,2,3. \\ I_t : \text{Estoque de X no período } t, \quad t = 1,2,3. \end{cases}$$

   Temos o modelo:

   $$\begin{aligned}
   \text{min} \quad & Z(I) = 2I_1 + 2I_2 + 2I_3 \\
   \text{Sujeito à} \quad & x_1 \leq 30 \\
   & x_2 \leq 30 \\
   & x_3 \leq 30 \\
   & 5 + x_1 - 20 = I_1 \\
   & I_1 + x_2 - 35 = I_2 \\
   & I_2 + x_3 - 40 = I_3 \\
   & x_t \in R^+, \quad t = 1,2,3 \\
   & I_t \in R^+, \quad t = 1,2,3
   \end{aligned}$$

2. (**R**) Uma metalúrgica produz componentes para a indústria automobilística e recebeu um pedido para o fornecimento de 7240 peças de um determinado modelo a ser entregue em 10 dias úteis. A fábrica pode processar a peça em 3 máquinas que apresentam tanto capacidade como precisão diferentes, e que produzirão durante 8 horas por dia, conforme a Tabela 1. Quantas máquinas de cada tipo deverão ser alocadas para esta tarefa, com o menor custo

   Tabela 1: Dados de descarte

	Cap. pçs/hr	**% descarte**	**R$/pça descarte**	**Custo operação R$/hr**	**Qtde. máquinas**
M1	20	5	2	85	4
M2	15	3	2	75	3
M3	12	1	2	70	1

   possível? Formule um modelo de programação linear para o problema.

Consideramos como variáveis o total de horas destinadas a cada tipo de máquina. Assim, para recuperarmos o número de máquinas utilizadas basta dividir as horas alocadas a esta máquina dividido pelo total de horas que uma máquina trabalha no período. As variáveis são então:

$$\left\{ M_I : \text{Quantidade de horas destinadas à produção nas máquinas do tipo } i \quad i = 1, 2, 3. \right.$$

Temos o modelo:

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & Z = 0.05 \times 20 \times 2M_1 + 0.03 \times 15 \times 2M_2 + 0.01 \times 12 \times 2M_3 \\
& 85M_1 + 75M_2 + 70M_3 \\
\text{Sujeito à} \quad & 10 \times 8 \times 4 \geq M_1 \\
& 10 \times 8 \times 3 \geq M_2 \\
& 10 \times 8 \times 1 \geq M_3 \\
& 0.95 \times 20M_1 + 0.97 \times 15M_2 + 0.99 \times 12M_3 = 7240 \\
& M_1, M_2, M_3 \in R^+
\end{aligned}$$

A função objetivo minimiza o custo das peças perdidas de cada máquina (dado pelo tempo de máquina multiplicado pela porcentagem de descarte e pelo custo dos descartes) somado ao custo de operação por hora de cada grupo de máquinas. As primeiras restrições limitam o tempo máximo disponível para cada máquina, já considerando os 10 dias e o número de cada tipo de máquina disponível. A última restrição garante que o total de peças produzido (dado pela produção por máquina/hora pela porcentagem de peças sem defeito) atinja

3. (**R**) Um avião de carga possui 3 compartimentos para armazenamento de carga: anterior, central e posterior. Esses compartimentos possuem limites na capacidade de carga, tanto em termos de *peso* quanto de *espaço* (volume), conforme mostrado na Tabela 2:

Tabela 2: Capacidade dos compartimentos do avião

Compartimento	**Capacidade em peso (t)**	**Capacidade em volume** pes^3
Anterior	12	600
Central	18	700
Posterior	10	400

Além disso, o peso da carga no respectivo compartimento deve **manter a mesma proporção da capacidade** de peso desse compartimento, para manter o equilíbrio da aeronave. Existem 4 tipos de cargas que podem ser transportadas no avião. As cargas são de grãos, de forma que **qualquer parcela** de cada carga pode ser transportada.

O peso, volume e lucro total das cargas é mostrado na Tabela 3 (por exemplo, se decidirmos transportar toda a carga 1, o peso será de 20t, o volume de 500 pes^3 e o lucro de 320US$).

O objetivo é determinar quanto (se alguma) de cada carga deve ser transportada e como distribuir cada uma delas entre os compartimentos de modo a maximizar o lucro total por voo. Formule um modelo de programação linear para este problema.

Tabela 3: Cargas que podem ser transportadas

Carga	**Peso(t)**	**Volume(pes^3)**	**Lucro(US$)**
1	20	500	320
2	16	700	400
3	25	600	360
4	13	400	290

Cada parte do avião (**A**nterior, **C**entral, **P**osterior) pode transportar qualquer uma das 4 cargas (1,2,3,4). Assim, definimos as variáveis:

$$\begin{cases} A_i : \text{\% da carga } i \text{ carregada no compartimento Anterior} \quad i = 1,2,3,4. \\ C_i : \text{\% da carga } i \text{ carregada no compartimento Central} \quad i = 1,2,3,4. \\ P_i : \text{\% da carga } i \text{ carregada no compartimento Posterior} \quad i = 1,2,3,4. \\ A : \text{Peso total carregado no compartimento Anterior} \\ C : \text{Peso total carregado no compartimento Central} \\ P : \text{Peso total carregado no compartimento Posterior} \end{cases}$$

Como estamos trabalhando com porcentagens de carga, a primeira restrição é a de que as porcentagens totais de uma carga (em todos os compartimentos) não deve ultrapassar 100%, ou seja:

$$A_1 + C_1 + P_1 \leq 1$$
$$A_2 + C_2 + P_2 \leq 1$$
$$A_3 + C_3 + P_3 \leq 1$$
$$A_4 + C_4 + P_4 \leq 1$$

Temos também que o volume total transportado em cada compartimento não deve ultrapassar a capacidade volumétrica do mesmo, ou seja:

$$500A_1 + 700A_2 + 600A_3 + 400A_4 \leq 600$$
$$500C_1 + 700C_2 + 600C_3 + 400C_4 \leq 700$$
$$500P_1 + 700P_2 + 600P_3 + 400P_4 \leq 400$$

A mesma restrição deve existir em relação ao peso de cada compartimento. Como vamos trabalhar com a restrição de proporção dos pesos mais a frente, é conveniente usar uma variável para o peso total em cada departamento (A,C e P). Portanto criamos a restrição:

$$20A_1 + 16A_2 + 25A_3 + 13A_4 = A$$
$$20C_1 + 16C_2 + 25C_3 + 13C_4 = C$$
$$20P_1 + 16P_2 + 25P_3 + 13P_4 = P$$

Agora podemos usar as variáveis A, C e P para construir as restrições de peso máximo nos compartimentos:

$$A \leq 12$$
$$C \leq 18$$
$$P \leq 10$$

A última restrição se refere a proporção de peso em cada compartimento. A quantidade em cada compartimento deve ser proporcional à capacidade de peso no compartimento. Por exemplo, considere que as capacidades dos compartimentos sejam 10, 30 e 50. Se temos uma carga com peso total de 10, então 1 deve ir para a primeira, 3 para a segunda e 5 para a terceira. Dessa forma, a restrição fica da seguinte forma:

$$A = (A + C + P)\frac{12}{40}$$
$$C = (A + C + P)\frac{18}{40}$$
$$P = (A + C + P)\frac{10}{40}$$

Queremos maximizar o lucro pelo trasporte das cargas. O modelo completo fica então:

$$
\begin{aligned}
\text{max} \quad & Z = 320(A_1 + C_1 + P_1) + 400(A_2 + C_2 + P_2) + \\
& 360(A_3 + C_3 + P_3) + 290(A_4 + C_4 + P_4) \\
\text{Sujeito à} \quad & \\
& A_1 + C_1 + P_1 \leq 1 \\
& A_2 + C_2 + P_2 \leq 1 \\
& A_3 + C_3 + P_3 \leq 1 \\
& A_4 + C_4 + P_4 \leq 1 \\
& 500A_1 + 700A_2 + 600A_3 + 400A_4 \leq 7000 \\
& 500C_1 + 700C_2 + 600C_3 + 400C_4 \leq 9000 \\
& 500P_1 + 700P_2 + 600P_3 + 400P_4 \leq 5000 \\
& 20A_1 + 16A_2 + 25A_3 + 13A_4 = A \\
& 20C_1 + 16C_2 + 25C_3 + 13C_4 = C \\
& 20P_1 + 16P_2 + 25P_3 + 13P_4 = P \\
& A \leq 12 \\
& C \leq 18 \\
& P \leq 10 \\
& (A + C + P)\frac{12}{40} = A \\
& (A + C + P)\frac{18}{40} = C \\
& (A + C + P)\frac{10}{40} = P \\
\text{Não negatividade das variáveis} \quad &
\end{aligned}
$$

O primeiro conjunto de restrições garante que o peso total em cada compartimento não exceda o limite. O segundo conjunto garante a mesma coisa para o volume. O terceiro conjunto atribui o total de peso em cada compartimento às variáveis A, C e P. Por fim as últimas restrições garantem a proporcionalidade de peso nos compartimentos.

4. (**R**) (*Kantorovich [1939]*) Considere o seguinte problema. Um produto é composto de duas peças diferentes de metal (Peça 1 e Peça 2). O trabalho de fresagem das peças pode ser realizado por 3 tipos de máquinas diferentes: fresadoras, tornos mecânicos e tornos automáticos CNC. Os dados básicos são mostrados na Tabela 4:

   Deseja-se encontrar a divisão do tempo disponível nas máquina para se obter o maior número de peças completas por hora, por meio de um modelo de programação linear (considere aceitável a aproximação não inteira do total de peças).

   (a) Defina e explique quais são as variáveis do problema.
   (b) Defina o modelo completo de PL e explique o(s) grupo(s) de restrições.

Produtividade das máquinas para as duas partes			
Tipo de máquina	**Número de máquinas**	**Número máximo de peças por máquina por hora**	
		Peça 1	Peça 2
Fresa	3	10	20
Torno mecânico	3	20	30
Torno automático	1	30	80

Tabela 4: Produtividade das máquinas

RESPOSTA

(a) Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} m_{ij} & \text{Tempo que as máquinas do tipo } i \text{ produzirão o item } j,\ i = 1,2,3,\ j = 1,2 \\ p_j & \text{Quantidade produzida da peça } j,\ j = 1,2 \end{cases}$$

(b) Temos o modelo:

$$\begin{aligned}
\text{maximizar} \quad & p_1 \\
\text{Sujeito à} \quad & p_1 - p_2 = 0 \\
& m_{11} + m_{12} \leq 3 \\
& m_{21} + m_{22} \leq 3 \\
& m_{31} + m_{32} \leq 1 \\
& p_1 - 10m_{11} - 20m_{21} - 30m_{31} = 0 \\
& p_2 - 20m_{12} - 30m_{22} - 80m_{32} = 0 \\
& x_{ji} \geq 0, x_{ji} \in R
\end{aligned}$$

A primeira restrição indica que a quantidade de peças do tipo 1 deve ser igual a quantidade de peças do tipo 2 (dado que um produto final é a composição das duas peças). O segundo grupo de restrições impõe o total de horas/máquina disponível para cada grupo de máquinas. Nessa formulação, consideramos que, como cada máquina irá trabalhar por uma hora, se existe a disponibilidade de 3 máquinas, temos 3 horas/máquina disponíveis a cada hora. O terceiro grupo de restrições conecta as variáveis pi com as m_{ij}. A quantidade produzida de cada produto p deve ser igual ao tempo que uma máquina ficar produzindo este produto, multiplicada pela quantidade máxima que a máquina produz por hora.

5. (**R**) *O problema do ovo e da galinha (Kemeny e Dantzig [1963]).* Suponha que uma galinha leva 2 semanas para botar 12 ovos para vender, ou chocar 4 novos pintinhos. Qual o melhor plano de bota/choca se no final do quarto período todas as galinhas e pintinhos acumulados são vendidos a 60 centavos a unidade, e cada ovo a 10 centavos. Formule o modelo considerando um quantidade inicial de 10 galinhas, 0 pintinhos e 20 ovos.

   Temos duas atividades decisórias que devemos otimizar: número de galinhas usadas para chocar e número de galinhas usadas para botar, em todos os períodos. Além disso, mantemos o controle do número de ovos, galinhas e pintinhos em cada período. Assim, temos as variáveis:

$$\begin{cases} B_t : \text{Número de galinhas usadas para botar no período } t \\ C_t : \text{Número de galinhas usadas para chocar no período } t \\ G_t : \text{Número de galinhas disponíveis no período } t \\ O_t : \text{Número de ovos no período } t \\ P_t : \text{Número de pintinhos no período } t \end{cases}$$

O número de galinhas usadas para botar e chocar no período t (B_t, C_t) não pode exceder o número de galinhas disponíveis no período:

$$\text{Limite de atividades:} \begin{cases} C_t + B_t \leq G_t \quad t = 1, ..., T \end{cases}$$

O número de galinhas no período t é dado pelo número de galinhas em $t-1$ menos a quantidade de galinhas selecionadas para chocar e botar em $t-1$, mais a quantidade de galinhas selecionadas para chocar e botar no período $t-2$ (pois as duas atividades duram 2 períodos). Esse é o caso do periodo 3 para cima, pois somente no período 3 podemos usar o periodo $t-2$, de forma que temos que criar os casos para $t=1$ e $t=2$. Assim, temos:

$$\text{Número de galinhas:} \begin{cases} G_1 = G_0 \\ G_2 = G_1 - B_1 - C_1 \\ G_t = G_{t-1} - B_{t-1} - C_{t-1} + B_{t-2} + C_{t-2} \quad t = 3, ...T \end{cases}$$

Considerando que cada atividade de chocar vai consumir 4 ovos, temos um limitante para essa atividade (aqui é considerado que cada galinha que choca o faz com exatos 4 ovos), assim:

$$\text{Limite de choca:} \begin{cases} 4C_t \leq O_t \quad t = 1, ..., T \end{cases}$$

O número de ovos em um período é dado pelo número de ovos no período passado, menos 4 vezes o número de galinhas usadas no período passado para chocar, mais 12 vezes o número de galinhas usadas para botar no período $t-2$ (cada galinha usada bota 12 ovos em 2 períodos). Novamente temos casos especiais para $t = 1, 2$.

$$\text{Número de ovos:} \begin{cases} O_1 = O_0 \\ O_2 = 0_1 - 4C_1 \\ O_t = O_{t-1} - 4C_{t-1} + 12B_{t-2} \quad t = 3, ...T \end{cases}$$

O número de pintinhos (é possível modelar sem essa variável) em um período t é o número de pintinhos em $t-1$ mais 4 vezes o número de galinhas usadas para chocar no período $t-2$.

$$\text{Número de pintinhos:} \begin{cases} P_1 = 0 \\ P_2 = 0 \\ P_t = P_{t-1} + 4C_{t-2} \quad t = 3, ...T \end{cases}$$

Ainda, para garantir que no último período teremos a contagem de galinhas e ovos para vender, alocamos 0 a ambas as atividades de chocar e botar:

$$\text{Número de pintinhos:} \begin{cases} C_t = 0 & t = T \\ B_t = 0 & t = T \end{cases}$$

Assim, o modelo completo considerando 4 períodos fica então:

$$\max \quad Z = 60P_4 + 60G_4 + 10O_4$$

$$\begin{cases} O_1 = 20 \\ G_1 = 10 \\ P1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ovos:} \begin{cases} O_2 = O_1 - 4C_1 \\ O_3 = O_2 - 4C_2 + 12B_1 \\ O_4 = O_3 - 4C_3 + 12B_2 \end{cases}$$

$$\text{Galinhas:} \begin{cases} G_2 = G_1 - B_1 - C_1 \\ G_3 = G_2 - B_2 - C_2 + B_1 + C_1 \\ G_4 = G_3 - B_3 - C_3 + B_2 + C_2 \end{cases}$$

$$\text{Limite choca} \begin{cases} 4C_1 \leq O_1 \\ 4C_2 \leq O_2 \\ 4C_3 \leq O_3 \\ 4C_4 \leq O_4 \end{cases}$$

$$\text{Limite atividades} \begin{cases} C_1 + B_1 \leq G_1 \\ C_2 + B_2 \leq G_2 \\ C_3 + B_3 \leq G_3 \\ C_4 + B_4 \leq G_4 \end{cases}$$

$$\text{Pintinhos} \begin{cases} P_2 = P_1 \\ P_3 = P_2 + 4C_1 \\ P_4 = P_3 + 4C_2 \end{cases}$$

$$\text{Atividades zeradas último período:} \begin{cases} B_4 = 0 \\ C_4 = 0 \end{cases}$$

6. (Estudo de caso simplificado - Katta Murty) O coque é um material usado na transformação do minério de ferro em ferro metálico, sendo assim essencial na industria de base. O coque é obtido a partir da destilação do carvão mineral em fornos, usando gás para o aquecimento dos mesmos. O processo de gerar coque gera também gás como resíduo, que pode ser usado novamente na própria produção de coque. Além disso, a proporção de coque gerado é de

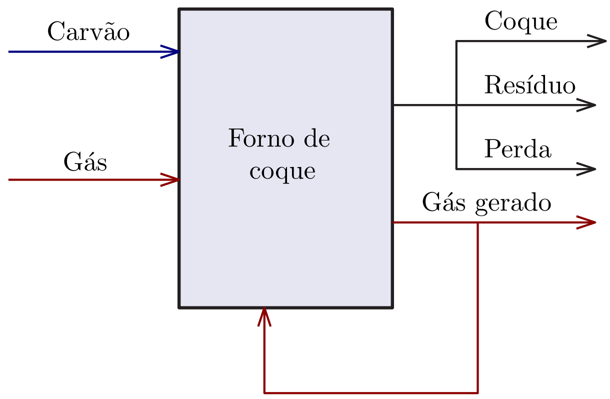

Figura 1: Processo de produção do coque

80%, 15% resíduo de coque (não aproveitável) e 5% perdas do processo. Uma imagem com o processo simplificado é mostrado na Figura 1.

Além de ser reutilizado no processo, o gás gerado pode também ser vendido. Os dados do problema são resumidos abaixo:

- A produção de 1 ton. de coque *precisa* de:
  (a) 50m^3 de gás.
  (b) 2 ton. de carvão.
- A produção de 1 ton. de coque *gera*:
  (a) 80% de coque.
  (b) 15% de resíduo.
  (c) 2m^3 de gás.
- Os custos e preços de venda para os componentes são:
  (a) 20 unidades/ton. de carvão comprado.
  (b) 5 unidades/m^3 de gás comprado.
  (c) 2 unidades/m^3 de gás gerado vendido.

Considere uma indústria que precisa produzir 8 ton. de coque mensalmente. Determine o plano ótimo de produção por meio de um PL. Resolva o problema usando o software GUSEK e analise as respostas. O que ocorre se o preço de venda do gás for alterado de 2 un. para 10 un.?

RESPOSTA

Precisamos determinar as quantidades a quantidade de MP e de gás que devem ser compradas, quanto de gás gerado será vendido e quanto será reutilizado, quanto de coque será produzido (considerando o aproveitamento de 80% da receita), minimizando os custos (poderia ser também maximizando os lucros, nesse caso o único lucro é a venda do gás). Tudo isso atendendo a demanda de 8 ton. de coque. Sejam as variáveis:

$$\begin{cases} x_{cp} : \text{Total de coque produzido} \\ x_{cg} : \text{Total de coque gerado a partir do produzido (80\%)} \\ x_{mp} : \text{Toneladas compradas de carvão (matéria prima)} \\ x_g : \text{Total de gás usado na produção de 1ton de coque} \\ x_{gc} : \text{Total de gás comprado } (m^3) \\ x_{gg} : \text{Total de gás gerado } (m^3) \\ x_{ggv} : \text{Total de gás gerado que é vendido } (m^3) \\ x_{ggu} : \text{Total de gás gerado que é usado no processo novamente } (m^3) \end{cases}$$

A primeira restrição é a que aglutina todas as outras: a quantidade mínima necessária de coque gerado (x_{cg}):

$$\text{Demanda de coque} : \begin{cases} x_{cg} \geq 8 \end{cases}$$

O coque gerado, no entanto, é somente uma proporção de todo o coque produzido (x_{cp}):

$$\text{Proporção de coque} : \begin{cases} x_{cg} = 0.8x_{cp} \end{cases}$$

Em seguida modelamos as quantidades consumidas de carvão (x_{mp}) e gás (x_g) para a produção de 1ton. de coque (x_{cp}).

$$\text{Consumo de gás e MP} : \begin{cases} x_g = 50x_{cp} \\ x_{mp} = 2x_{cp} \end{cases}$$

Finalmente modelamos as restrições do gás: o gás usado no processo (x_g) é a soma do gás comprado e do gás gerado que será usado. Também, o gás gerado é a soma do gás gerado para consumo e do gás gerado para a venda, e 1 ton. de coque gera $2m^3$ de gás gerado.

$$\text{Consumo de gás e MP} : \begin{cases} x_g = x_{gc} + x_{ggu} \\ x_{gg} = 2x_{cp} \\ x_{gg} = x_{ggu} + x_{ggv} \end{cases}$$

A função objetivo deve minimizar o custo da compra de carvão e de gás, com o negativo da venda do gás vendido:

$$\min \quad Z = 20x_{mp} + 5x_{gc} - 2x_{ggv}$$

O modelo completo fica então:

$$\min \quad Z = 20x_{mp} + 5x_{gc} - 2x_{ggv}$$

Sujeito a:

$$\begin{cases} x_{cg} \geq 8 \\ x_{cg} = 0.8x_{cp} \\ x_g = 50x_{cp} \\ x_{mp} = 2x_{cp} \\ x_g = x_{gc} + x_{ggu} \\ x_{gg} = 2x_{cp} \\ x_{gg} = x_{ggu} + x_{ggv} \end{cases}$$

O modelo no GUSEK fica como na Figura 2 (lembrando que no GUSEK o lado direito das restrições devem ser sempre constantes).

```
Minimize
20 x_mp + 5 x_gc - 2 x_ggv
Subject To
x_cg >= 8
x_cg - 0.8 x_cp = 0
x_mp - 2 x_cp = 0
x_g - 50 x_cp = 0
x_gg - x_ggu - x_ggv = 0
x_gg - 2 x_cp = 0
x_g - x_ggu - x_gc = 0
End
```

Figura 2: Modelo do coque no GUSEK

7. (**R**) (*Bazaraa*) Considere o problema de determinar a localização de uma nova máquina em um layout já existente, que consiste de 4 máquinas. Considerando o espaço 2 dimensional, essas máquinas estão localizadas nas coordenadas $(3,1)$,$(0,-3)$,$(-2,2)$ e $(1,4)$. Sejam (x_1, x_2) as coordenadas da nova máquina a ser posicionada. Formule um modelo de PL para determinar a localização ótima da nova máquina, considerando que a soma das distâncias das 4 máquinas até a nova é minimizada. Use a distância de *Manhattan* (também conhecida como distância retilinear); por exemplo, a distancia entre (x_1, x_2) até a primeira máquina em $(3,1)$ é $|x_1 - 3| + |x_2 - 1|$.

   O modelo original pode ser escrito como a minimização das distancias Manhattan, sem nenhuma restrição:

$$\text{minimizar } |x_1 - 3| + |x_2 - 1| + |x_1 - 0| + |x_2 + 3| + |x_1 + 2| + |x_2 - 2| + |x_1 - 1| + |x_2 - 4|$$

Como o módulo não é uma função linear, precisamos fazer uma transformação. Para simplificar a notação, vamos chamar cada parcela dos módulos de y_i, igualando as componentes nas restrições:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar } |y_1| + |y_2| + |y_3| + |y_4| + |y_5| + |y_6| + |y_7| + |y_8| \\
y_1 = x_1 - 3 \\
y_2 = x_2 - 1 \\
y_3 = x_1 - 0 \\
y_4 = x_2 + 3 \\
y_5 = x_1 + 2 \\
y_6 = x_2 - 2 \\
y_7 = x_1 - 1 \\
y_8 = x_2 - 4 \\
y_i >= 0, i = 1, ..., 8
\end{aligned}
$$

Sabemos que cada componente dentro do módulo ($x_1 - 3$, por exemplo), pode assumir valores negativos (isso SEM a operação do módulo). Dessa forma, cada y_i é uma variável irrestrita. Podemos modelar uma variável irrestrita pela diferença de duas variáveis positivas (por exemplo $y_i = y_i^+ - y_i^-$). Temos então:

$$
\begin{aligned}
\text{minimizar } |y_1^+ - y_1^-| + |y_2^+ - y_2^-| + |y_3^+ - y_3^-| + |y_4^+ - y_4^-| + \\
|y_5^+ - y_5^{|} + |y_6^+ - y_6^-| + |y_7^+ - y_7^-| + |y_8^+ - y_8^-| \\
y_1^+ - y_1^- = x_1 - 3 \\
y_2^+ - y_2^- = x_2 - 1 \\
y_3^+ - y_3^- = x_1 - 0 \\
y_4^+ - y_4^- = x_2 + 3 \\
y_5^+ - y_5^- = x_1 + 2 \\
y_6^+ - y_6^- = x_2 - 2 \\
y_7^+ - y_7^- = x_1 - 1 \\
y_8^+ - y_8^- = x_2 - 4 \\
y_i^+, y_i^- >= 0, i = 1, ..., 8
\end{aligned}
$$

Cada componente do módulo foi separada em duas outras, uma representando a parcela positiva e uma a parcela negativa (a variável é positiva, o sinal negativo modela esse comportamento). Nesses casos, sempre uma das duas parcelas é zero. Dessa forma podemos simplesmente somar ambas as componentes (se houver parcela negativa, na função objetivo selecionamos somente a sua parte positiva). Assim a função módulo fica completamente representada:

$$\begin{aligned}
\text{minimizar } y_1^+ + y_1^- + y_2^+ + y_2^- + y_3^+ + y_3^- + y_4^+ + y_4^- + \\
y_5^+ + y_5^+ + y_6^+ + y_6^- + y_7^+ + y_7^- + y_8^+ + y_8^- \\
y_1^+ - y_1^- = x_1 - 3 \\
y_2^+ - y_2^- = x_2 - 1 \\
y_3^+ - y_3^- = x_1 - 0 \\
y_4^+ - y_4^- = x_2 + 3 \\
y_5^+ - y_5^- = x_1 + 2 \\
y_6^+ - y_6^- = x_2 - 2 \\
y_7^+ - y_7^- = x_1 - 1 \\
y_8^+ - y_8^- = x_2 - 4 \\
y_i^+, y_i^- >= 0, i = 1, ..., 8
\end{aligned}$$