Simplex fase I: variáveis artificiais

Alexandre Checoli Choueiri

12/09/2023

O que sabemos fazer

O algoritmo Simplex

O **algoritmo** Simplex requer uma solução básica factível para que possa ser iniciado. Quando temos um modelo somente com restrições do tipo $\leq$, sempre é possível criar uma SBF no início.

Modelo com restrições $\leq$

O que sabemos fazer

Considere o seguinte modelo de PL:

$$
\begin{aligned}
\text{max } z = 5x_1 + 2x_2 & \\
10x_1 + 12x_2 &\leq 60 \\
2x_1 + x_2 &\leq 6 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Modelo com restrições $\leq$

O que sabemos fazer

Na forma padrão, temos (min z e inserindo variáveis de folga).

$$\begin{array}{lrrrrl}
\text{min z} = & -5x_1 & -2x_2 & & & \\
& 10x_1 + & 12x_2 + & x_3 & & = 60 \\
& 2x_1 + & x_2 + & & x_4 & = 6
\end{array}$$

Modelo com restrições $\leq$

O que sabemos fazer

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Colocando os dados em **forma tabular**:

Modelo com restrições $\leq$

O que sabemos fazer

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Como temos 2 restrições, a presença de uma matriz identidade ($\mathbf{I}_{2X2}$) já fornece uma solução básica factível (lembre-se de que os coef. da função objetivo também devem ser zerados nas colunas das variáveis básicas).

Modelo com restrições $\leq$

O que sabemos fazer

	x_1	x_2	x_3	x_4	-z
VB	-5	-2	0	0	0
x_3	10	12	1	0	60
x_4	2	1	0	1	6

Temos a solução $x_B^T = (x_3, x_4) = (60, 6)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$

Modelo com restrições $\leq$

O que sabemos fazer

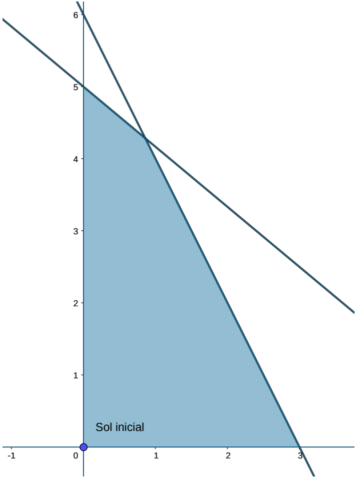
	x_3	x_4	-z
VB	0	0	0
x_3	1	0	60
x_4	0	1	6

De forma que o sistema é **canônico**, e equivalente ao mostrado abaixo, em que a solução é trivial.

Modelo com restrições $\leq$

O que sabemos fazer

Podemos ver graficamente que a solução básica $x_B^T = (x_3, x_4) = (60, 6)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ é factível.



Modelo com restrições $\geq$ ou $=$

O que não sabemos fazer

Restrições do tipo $\geq$ ou $=$

Mas o que acontece quando temos restrições do tipo "$\geq$" ou "$=$" no modelo? Considere o modelo abaixo.

$$
\begin{aligned}
\max\ z = x_1 + x_2 & \\
4x_1 + 2x_2 \quad & \geq 20 \\
x_1 \quad & \leq 9 \\
x_2 \quad & \leq 11 \\
x_1, x_2 \geq 0 &
\end{aligned}
$$

O que não sabemos fazer

Modelo com restrições $\geq$ ou $=$

O problema

$$
\begin{aligned}
\text{min } z = -x_1 + -x_2 & \\
4x_1 + 2x_2 \color{red}{-x_3} \qquad\qquad & = 20 \\
x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad & = 9 \\
x_2 \qquad\qquad + x_5 & = 11
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Na forma padrão, temos:

Modelo com restrições $\geq$ ou $=$

O problema

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	20
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

Na forma tabular:

Modelo com restrições $\geq$ ou $=$

O problema

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	20
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

Note que com esse modelo, a sol. básica formada pelas variáveis de folgas/excessos **não é factível**, devido a negatividade de x_3 na linha 2.

Modelo com restrições $\geq$ ou $=$

O problema

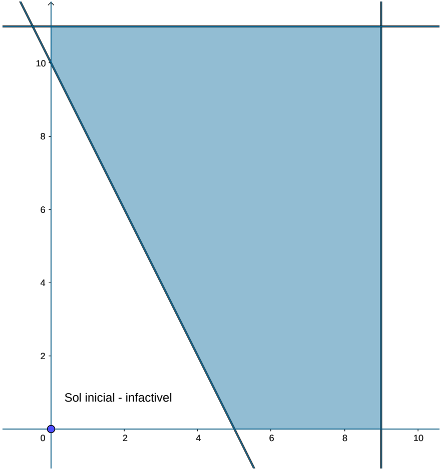
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
???	4	2	-1	0	0	20
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	0	1	0	0	1	11

Essa solução implicaria $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (-20, 9, 11)$, com $x_3 < 0 \rightarrow$ **infactível**

Modelo com restrições $\geq$ ou $=$

O problema

Podemos ver graficamente que a solução básica $x_B^T = (x_3, x_4, x_5)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$ não está na região factível.



A solução

Método x Algoritmo Simplex

É por esse motivo que o **método** Simplex é composto por duas fases, chamadas **Fase I** e **Fase II**. Em ambas as fases o **algoritmo** Simplex é usado.

1. Método Simplex:
   1.1 **FASE I:** Verifica se o problema tem uma SBF inicial. Se não, tenta encontrar uma (pelo algoritmo Simplex e um modelo alterado).
   1.2 **FASE II:** Com uma SBF, inicia o algoritmo Simplex no modelo original.

Como operar a Fase I?

A solução

- Existem 2 formas de operarmos a Fase I do método Simplex, a fim de encontrarmos uma SBF. O chamado **método do big-M** e o **método das variáveis artificiais.**
- Como seguimos o material do criador do Simplex (George B. Dantzig), usaremos a sua sugestão: **método das variáveis artificiais**. Porém ambos são equivalentes.

A lógica das variáveis artificiais

Este método insere novas variáveis no modelo para **artificialmente gerar uma matriz identidade** nos coeficientes da matriz. Como elas não fazem parte do sistema, uma **nova função objetivo** é inserida, que deve minimizar a soma destas variáveis, levando o simplex a removê-las da base. Quando (se) isso ocorre, uma SBF é encontrada e as variáveis artificiais podem ser retiradas do sistema.

Como operar a Fase I?

A solução

A lógica das variáveis artificiais

Ou seja, o método cria uma solução inicial com variáveis que não existem e tenta retirá-las do problema pelo próprio método Simplex e por uma alteração na função objetivo. Se o Simplex conseguir eliminar essas variáveis artificiais, quer dizer que ele encontrou uma solução básica factível sem usá-las (somente com as originais).

O método das variáveis artificiais

A solução

O **método das variáveis artificiais** consiste dos seguintes passos (considerando o modelo já na forma padrão):

1. Torne todo b não negativo.
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \dots, \bar{x}_{n+m})$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:

$$\text{min } w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

O método das variáveis artificiais

A solução

Ao fim da otimização do novo sistema, faça:

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível.
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas** (remova as colunas das variáveis artificiais).
   2.2 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

O método das variáveis artificiais

A solução

Vamos executar o método das variáveis artificiais no problema anterior.

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo.
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \ldots, \bar{x}_{n+m})$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema

A solução

O modelo na forma padrão não possui nenhum $b < 0$

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{min } z = -x_1 + -x_2 & & & & & & \\
4x_1 & + 2x_2 & -x_3 & & & = & 20 \\
x_1 & & & + x_4 & & = & 9 \\
 & x_2 & & & +x_5 & = & 11
\end{array}
$$

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva.

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, \ldots, \bar{x}_{n+m})$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:

$$\min\ w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema
A solução

Adicionamos a cada restrição uma variável artificial.

$$
\begin{array}{lllllllll}
\text{min } z = -x_1 + -x_2 & & & & & & & & \\
 & 4x_1 + 2x_2 & -x_3 & & & + \bar{x}_6 & & & = 20 \\
 & x_1 & & + x_4 & & & + \bar{x}_7 & & = 9 \\
 & x_2 & & & + x_5 & & & + \bar{x}_8 & = 11
\end{array}
$$

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m}) \checkmark$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas:

$$\text{min } w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema

A solução

Adicionando a nova função objetivo w:

$$
\begin{array}{rl}
\text{min } w = & +\bar{x}_6 + \bar{x}_7 + \bar{x}_8 \\
4x_1 + 2x_2 - x_3 + \bar{x}_6 & = 20 \\
x_1 + x_4 + \bar{x}_7 & = 9 \\
x_2 + x_5 + \bar{x}_8 & = 11
\end{array}
$$

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓
$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m})\checkmark$$
3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas: ✓
$$\text{min } w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j\checkmark$$
4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica).
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
	1	0	0	1	0	0	1	0	9
	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Colocando o problema na forma tabular.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
	1	0	0	1	0	0	1	0	9
	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Para deixar na forma canônica em relação às variáveis $x_B^T = (\bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8)$ (colocá-las na base) é necessário zerar os coeficientes delas na função objetivo (marcados com 1). Essa é uma atualização comum a todos os problemas: atualizar a linha 1 com a subtração de todas as outras:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
	1	0	0	1	0	0	1	0	9
	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Para deixar na forma canônica em relação às variáveis $x_B^T = (\bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8)$ (colocá-las na base) é necessário zerar os coeficientes delas na função objetivo (marcados com 1). Essa é uma atualização comum a todos os problemas: atualizar a linha 1 com a subtração de todas as outras:

1. $L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 - L_4$

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Após as atualizações temos a tabela:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Com variáveis básicas $x_B^T = (\bar{x}_6, \bar{x}_7, \bar{x}_8) = (20, 9, 11)$ e não básicas $x_N^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ $= (0, 0, 0, 0, 0)$. De forma que podemos começar a aplicar o método Simplex.

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. ✓
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. ✓

$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m}) \checkmark$$

3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas: ✓

$$\text{min } w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j \checkmark$$

4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica). ✓
5. Aplique o método Simplex na tabela atual.

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{-5, -3, -1, -1\} = -5$ com x_1 entrando na base.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{\frac{20}{4}, \frac{9}{1}\} = \frac{20}{4} = \bar{x}_6$ saindo da base.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

1. $L_2 \leftarrow L_2/4$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

1. $L_2 \leftarrow L_2/4$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	-5	-3	1	-1	-1	0	0	0	-40
$\bar{x}_6$	4	2	-1	0	0	1	0	0	20
$\bar{x}_7$	1	0	0	1	0	0	1	0	9
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{2,1} = 4$. Realizando o pivoteamento da tabela:

1. $L_2 \leftarrow L_2/4$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 5L_2$
3. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos a tabela atualizada com variáveis básicas $x_B^T = (x_1, \bar{x}_7, \bar{x}_8) = (5, 4, 11)$ e não básicas $x_N^T = (\bar{x}_6, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Note que já conseguimos remover uma variável artificial da base (removemos $\bar{x}_6$ e inserimos x_1).

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base.

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base. **OBS:** Aqui seria possível escolher outra variável para entrar na base (x_5). Teria alguma diferença?

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -1\} = -1$ com x_4 entrando na base. O nosso objetivo é **remover as variáveis artificiais da base.** Selecionando tanto x_4 quanto x_5 para entrar, forçaria uma artificial a sair ($\bar{x}_7$ ou $\bar{x}_8$), de forma que podemos escolher arbitrariamente.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{\frac{4}{1}\} = 4$ com $\bar{x}_7$ saindo da base.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{3,4} = 1$. Pivoteamento da tabela:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1/2	-1/4	-1	-1	5/4	0	0	-15
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
$\bar{x}_7$	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivo $a_{3,4} = 1$. Pivoteamento da tabela:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos a tabela atualizada com a nova base $x_B^T = (x_1, x_4, \bar{x}_8,) = (5, 4, 11)$ e não básicas $x_N^T = (\bar{x}_6, x_2, x_3, \bar{x}_7, x_5) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Note que já conseguimos remover duas variáveis artificiais da base (agora inserimos x_4).

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Novamente, aqui seria possível escolher entre x_2 e x_5. Teria alguma diferença?

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

OBS: Novamente, aqui seria possível escolher entre x_2 e x_5. Teria alguma diferença? Nesse caso sim! Se escolhermos x_2, a variável que sairia da base é x_1 (uma não artificial). Já escolhendo x_5 quem sai é $\bar{x}_8$ (uma artificial), de forma que devemos dar preferência a escolha de x_5.

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Selecionando min $\{\frac{11}{1}\} = 1$ com $\bar{x}_8$ saindo da base.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivô $a_{4,5} = 1$. Pivoteamento da tabela:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	-1	0	0	-1	1	1	0	-11
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
$\bar{x}_8$	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Temos o elemento pivô $a_{4,5} = 1$. Pivoteamento da tabela:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$

Resolvendo o problema

A solução

A tabela atualizada fica:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

1. Torne todo b não negativo. $\checkmark$
2. Adicione variáveis artificiais: para cada restrição adicione uma nova variável artificial positiva. $\checkmark$
$$x_a = (\bar{x}_{n+1}, \bar{x}_{n+2}, ..., \bar{x}_{n+m}) \checkmark$$
3. Substitua a função objetivo original z pela minimização de w, que é a soma das variáveis artificiais adicionadas: $\checkmark$
$$\text{min } w = \sum_{j=n+1}^{n+m} \bar{x}_j \checkmark$$
4. Faça as v. art. básicas (elimine os coef. das mesmas na f.o para deixar o sistema na forma canônica). $\checkmark$
5. Aplique o método Simplex na tabela atual. $\checkmark$

Fim da otimização Fase I

A solução

Verificação de factíbilidade

Com isso chegamos ao fim da otimização na Fase I. Agora verificamos se podemos continuar (se o problema original é factível), adaptando a tabela novamente (removendo colunas extras e trocando a função objetivo).

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível.
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas** (remova as colunas das variáveis artificiais).
   2.2 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

- Vemos que o valor $w = 0$, ou seja, o problema original é **factível**.

O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas** (remova as colunas das variáveis artificiais).
   2.2 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{x}_6$	$\bar{x}_7$	$\bar{x}_8$	-w
VB	0	0	0	0	0	1	1	1	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	-1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	0	0	1	11

- Todas as variáveis artificiais são não básicas, de forma que podemos remover todas essas colunas da tabela:

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-w
VB	0	0	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

- Ficamos com:

O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas** (remova as colunas das variáveis artificiais). ✓
   2.2 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base).
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

- Ao substituirmos novamente a função objetivo original (min $z = -x_1 - x_2$), nota-se que o sistema não se mantém na forma canônica.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	-1	0	0	0	0
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	-1/2	-1/4	0	0	5
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

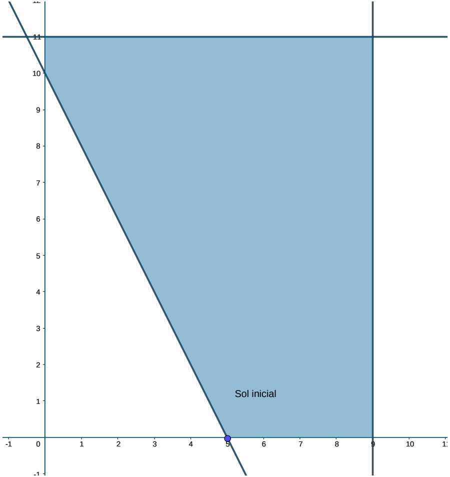
A nova tabela atualizada fica:

OBS: Note que conseguimos uma solução básica factível (**SBF**) somente com as variáveis originais.

Resolvendo o problema

A solução

Podemos verificar isso graficamente, com $x_B^T = (x_1, x_4, x_5) = (5, 4, 11)$



O método das variáveis artificiais

A solução

1. Se min $w > 0$ no fim da Fase I PARE: o problema original é infactível. ✓
2. Preparação para a Fase II:
   2.1 Se alguma variável não-básica não-artificial tem coef. > 0 na função objetivo w, elimine-as da tabela. ✓
   2.2 Elimine da tabela **todas as variáveis artificiais não básicas**. ✓
   2.3 Elimine a fo w e reinsira a função original z, realizando as operações para manter o sistema na forma canônica (deixando 0 todos os coef. da linha de z referentes as variáveis atualmente na base) ✓.
3. Aplique o Simplex Fase II utilizando a base atual.

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	-1/2	-1/4	0	0	5
x_1	1	1/2	-1/4	0	0	5
x_4	0	-1/2	1/4	1	0	4
x_5	0	1	0	0	1	11

Aplicando o simplex:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$
2. $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$
3. $L_2 \leftarrow 2L_2$
4. $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	1	0	-1/2	0	0	10
x_2	2	1	-1/2	0	0	10
x_4	1	0	0	1	0	9
x_5	-2	0	1/2	0	1	1

Aplicando o simplex:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_4$
2. $L_2 \leftarrow L_2 + L_4$
3. $L_4 \leftarrow 2L_4$

Resolvendo o problema

A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	-1	0	0	0	1	11
x_2	0	1	0	0	1	11
x_4	1	0	0	1	0	9
x_3	-4	0	1	0	2	2

Aplicando o simplex:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$
2. $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2$

Resolvendo o problema
A solução

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	-z
VB	0	0	0	1	1	20
x_2	0	1	0	0	1	11
x_1	1	0	0	1	0	9
x_3	0	0	1	4	2	38

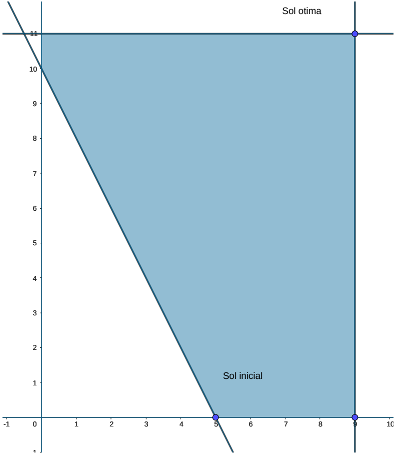
Solução ótima

Solução ótima com $x_B^T = (x_2, x_1, x_3) = (11, 9, 38)$ e $x_N^T = (x_4, x_5) = (0, 0)$

Resolvendo o problema

A solução

Podemos verificar isso graficamente, com $x_B^T = (x_2, x_1, x_3) = (11, 9, 38)$ e $x_N^T = (x_4, x_5) = (0, 0)$.



Conclusões

Conclusões

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma sub-matriz identidade em $\mathbf{A}$).

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma sub-matriz identidade em $\mathbf{A}$).
2. Nesses casos precisamos de um método para primeiro encontrar uma SBF, e somente em seguida aplicar o algoritmo Simplex no modelo original.

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma sub-matriz identidade em $\mathbf{A}$).
2. Nesses casos precisamos de um método para primeiro encontrar uma SBF, e somente em seguida aplicar o algoritmo Simplex no modelo original.
3. Essa busca por uma SBF é chamada **Fase I** do **Método Simplex**. Existem duas técnicas para aplicar a Fase I: método do Big-M e **método das variáveis artificiais** (o que usamos).

Conclusões

1. Quando temos um modelo com restrições do tipo $\geq$ ou $=$ não conseguimos uma solução básica factível (SBF) de forma automática (não existe uma sub-matriz identidade em $\mathbf{A}$).
2. Nesses casos precisamos de um método para primeiro encontrar uma SBF, e somente em seguida aplicar o algoritmo Simplex no modelo original.
3. Essa busca por uma SBF é chamada **Fase I** do **Método Simplex**. Existem duas técnicas para aplicar a Fase I: método do Big-M e **método das variáveis artificiais** (o que usamos).
4. Após o fim da Fase 1 existem duas possibilidades:
   - 4.1 $w > 0 \rightarrow$ problema original **infactível**.
   - 4.2 $w = 0 \rightarrow$ problema original **factível**, base atual é factível para o problema original.

Exercícios

Exercícios

Encontre a solução do seguinte modelo de PL. Represente o caminho Simplex a partir da primeira solução básica factível.

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 6x_1 - x_2 & \\
4x_1 + x_2 &\leq 21 \\
2x_1 + 3x_2 &\geq 13 \\
x_1 - x_2 &= -1 \\
x_1, x_2 \geq 0 &
\end{aligned}
$$